

---

# Grundlagen der Algorithmischen Geometrie

---

## Prüfungsfragen Kapitel 1 bis Kapitel 6

zur Vorlesung von Elmar Langetepe SS 15

Beachten Sie bitte: Diese Liste hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit! Es wird auch an konkreten Instanzen/Beispielen gefragt.

Z.B.: Wie sieht das Voronoi Diagramm dieser Punktmenge aus?

Oder: Wie sieht die Zeigerliste nach Einfügen dieser ersten 5 Punkte aus?

(Inkrementelle Konstruktion konvexe Hülle.)

Oder: Konstruieren Sie für diese Punktmenge einen 2d-Baum.

Oder: Wo ist hier der Maximum-Subvektor?

Oder: Wie sieht die SSS in diesem Moment aus?

Welche Ereignisse kommen hier noch dran, in welcher Reihenfolge!

Wie werden diese bearbeitet?

### Kapitel 1: Untere Schranken/Elementtest

- Was verstehen wir unter dem linearen Modell?
- Welche untere Laufzeitkomplexität hat das Sortieren durch Schlüsselvergleiche?  
Was ist ein Entscheidungsbaum?  
Beweisen Sie diese untere Schranke durch die Analyse der Höhe des Entscheidungsbaumes!
- Was bezeichnen wir als Elementtest?  
Was besagt das allgemeine Theorem (1.5) über die untere Schranke der Laufzeit für den Elementtest einer Menge  $W$  aus dem  $\mathbb{R}^n$ ?  
Was sind Zusammenhangskomponenten?  
Skizzieren Sie die Beweisidee von Theorem 1.5 für die disjunkte Zerlegung von  $W$  in  $m$  Zusammenhangskomponenten!
- Geben Sie die unteren Laufzeitschranken für Epsilon-Closeness und Element-Uniqueness an!  
Für welche Mengen wird jeweils der Elementtest durchgeführt? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Geben Sie durch die Angabe einer Reduktion untere Laufzeitschranken für verschiedene Probleme an:  
 $\epsilon$ -Closeness  $\leq_P$  All-Nearest-Neighbors  
 $\epsilon$ -Closeness/Element Uniqueness  $\leq_P$  Sortieren  
 $\epsilon$ -Closeness  $\leq_P$  Schnitt von Liniensegmenten  
Was genau ist eine solche Reduktion?

### Kapitel 2: Sweep Verfahren und DSS

- Geben Sie die wesentlichen Bestandteile eines Sweep an!
- Was genau ist das Problem des Maximum-Subvektors?  
Wie und in welcher Laufzeit kann dieses Problem naiv gelöst werden?  
Wie kann dieses Problem mit einem Sweep optimal gelöst werden?  
Welche Invariante ist notwendig?  
Beweisen Sie die Korrektheit und Laufzeit des Verfahrens!
- Beschreiben Sie den Sweep zur Bestimmung des Closest-Pairs von  $n$  Punkten in der Ebene.  
Welche Ereignisse treten auf? Welche SSS wird verwendet?

Welche Eigenschaft wird für die Konstruktion der SSS verwendet?

Schätzen Sie die Laufzeit des Verfahrens durch die Analyse der Ereignisse ab!

Wie wird im SSS-Streifen effizient nach den zu betrachtenden Punkten gesucht?

Wie ist die Laufzeit für diese Abfrage?

Welche Datenstruktur wird dabei verwendet?

Welche geometrische Eigenschaft wird benutzt?

- Beschreiben Sie den Sweep zur Bestimmung der Schnittpunkte von  $n$  Liniensegmenten in der Ebene.

Welche Ereignisse treten auf? Welche SSS wird verwendet?

Welche Datenstrukturen werden dabei benutzt?

Welche strukturelle Eigenschaft der Schnittpunkte ist hilfreich für die Umsetzung des Sweeps?

Analysieren Sie die Laufzeit des Verfahrens: Ereignisse  $\times$  Bearbeitungskosten!

Warum reicht es aus, dass wir in der ES nur  $O(n)$  viele neue Ereignisse speichern? Platzsparregel!

- Was ist eine Davenport-Schinzel-Sequenz der Ordnung  $s$ ?

Was beschreibt die Funktion  $\lambda_s(n)$ ?

Geben Sie ein Beispiel an! Geben Sie typischen Längen  $\lambda_s(n)$

(für verschiedene Werte von  $s$ ) dieser Sequenzen an.

Wie ist der Zusammenhang zwischen der DSS und der unteren Kontur von Funktionen?

Begründung dazu!

In welcher Laufzeit kann man die untere Kontur einer Menge von Liniensegmenten berechnen?

Geben Sie das Berechnungsverfahren an und analysieren Sie die Laufzeit!

## Kapitel 3: Geometrische Datenstrukturen!

- Welche typische Anfragen werden mit geometrischen Datenstrukturen gestellt?  
Welche kennen wir schon aus den obigen Anwendungen?
- Wie wird ein 2d-Baum konstruiert, welche Anfragen sollen damit wie beantwortet werden?  
Geben Sie die Laufzeiten für den Aufbau und die Bereichsanfrage an!  
Wieviel Speicherplatz wird benötigt?  
Skizzieren Sie den Beweis für die Bereichsanfrage des 2d-Baumes:  
Zählen Sie systematisch alle Knoten, die von einem Anfragerechteck geschnitten werden!  
Welche Eigenschaft kommt dabei zur Anwendung!  
Was kann getan werden, wenn es Punkte mit identischen X- oder Y-Koordinaten?  
Wo liegt das Problem, und wie kann es behoben werden?  
Geben Sie die allgemeinen Laufzeiten für einen kd-Baum an.
- Welche Anfragen sollen mit einem k-dimensionalen Bereichsbaum beantwortet werden?  
Erläutern Sie den rekursiven Aufbau eines Bereichsbaums anhand einer zweidimensionalen Punktmenge!  
Beschreiben Sie eine Bereichsanfrage! Analysieren Sie die Laufzeit für eine Bereichsanfrage!  
Beschreiben Sie den rekursiven Aufbau! Analysieren Sie die Laufzeit für den Aufbau!  
Wie oft kommt ein einzelner Punkt insgesamt vor? Analysieren Sie den Platzbedarf!
- Erklären Sie den Unterschied zwischen Bereichsbaum und kd-Baum!
- Welche speziellen Anfragen sollen mit einem Prioritätssuchbaum beantwortet werden?  
Geben Sie die Laufzeiten für Aufbau und Query und den Platzbedarf an!  
Begründen Sie Ihre Antwort!  
Begründen Sie formal (induktiv), warum beim Aufbau stets genügend Platz im Baum vorhanden ist!  
Wie kann man den Prioritätssuchbaum für eine Intervallüberlappungsanfrage verwenden!  
Geben Sie die Konstruktion dafür an!  
Wie kann man den Prioritätssuchbaum für eine Rechteckanfrage mit fester Höhe  $h$  verwenden!  
Geben Sie die Konstruktion dafür an!  
Welche Laufzeiten ergeben sich für diese Anwendungen?

## Kapitel 4: Konvexe Hülle

- Wie ist die konvexe Hülle von  $n$  Punkten formal definiert?
- Welche Struktur hat die konvexe Hülle von  $n$  Punkten?
- Welche Laufzeitkomplexität hat die Konstruktion der konvexen Hülle?  $O(\Omega(\Theta))$ , Begründung!!
- Beweisen Sie eine untere Schranke von  $\Omega(n \log n)$ ?
- Beschreiben Sie die verschiedenen Berechnungsalgorithmen:
  - a) Inkrementelle Konstruktion mit Baum der Sektoren
  - b) Randomisierte inkrementelle Konstruktion mit Array der Kantenzeiger
  - c) Einfaches Verfahren nach Sortierung in einer KoordinateAnalysieren Sie für die verschiedenen Algorithmen die Laufzeit!
- Rand. Inkrementelle Konstruktion, zufällige Auswahl:

Argumentieren Sie, warum es insgesamt nur eine erwartete Anzahl von  $O(\log j)$  viele Konflikte (Zeigerwechsel) für einen zum Zeitpunkt  $j$  einzufügenden Punkt  $p_j$  geben kann.  
Geben Sie das worst-case Beispiel für  $\Omega(n^2)$  viele Konfliktpaare an!
- Was ist ein Konfliktpaar  $(p_i, p_j)$  für die Eingabe-Reihenfolge  $p_1, p_2, \dots, p_n$  und  $i$  kleiner  $j$ ?
- Beschreiben Sie die Dualitätsabbildung zwischen Punkten und Geraden!
- Welche Eigenschaften bleiben erhalten?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Konvexen Hülle von Punkten und der Kontur des Durchschnitts von Halbebenen?  
Welche Folgerungen ergeben sich daraus für die Berechnung des Schnitts von Halbebenen?  
Laufzeiten, Berechnungsmöglichkeiten?

## Kapitel 4: Triangulationen

- Wie ist eine Triangulation eines Polygons formal definiert?
- Was wissen wir über die Existenz von Diagonalen?
- Was besagt das Ohrentheorem Theorem 4.16?  
Wie war die Beweisidee dazu?
- Wieviele Dreiecke/Diagonalen hat die Triangulation eines Polygons mit  $n$  Ecken?  
Beweisen Sie diese Aussagen induktiv!
- Was wissen wir über den Drehwinkel beim Umlaufen eines Polygons? Wie haben wir die Aussage bewiesen?
- Wieviele Wächter können für ein einfaches Polygon notwendig sein und wieviele reichen immer aus?  
Beweisen Sie Ihre Aussagen!
- Was ist der Kern eines Polygons?
- Wie kann man den Kern eines Polygons berechnen?
  - a) Schnitt von Halbebenen! Naiv! Laufzeit?
  - b) Schnitt von Halbebenen! Verbessert! Laufzeit?
  - c) In optimaler Zeit? Schnitt von speziellen Halbebenen! Laufzeit?Beschreiben Sie das jeweilige Verfahren und begründen Sie die Korrektheit!

## Kapitel 1: Graphengrundlagen

- Was ist ein planarer Graph?  
Geben Sie die Eulerformel für planare Graphen an!  
Beweisen Sie die Formel durch strukturelle Induktion!
- Begründen Sie:  $3v \leq 2e$  für kreuzungsfreie geometrische Graphen mit Knotengrad  $\geq 3$ !  
Woraus folgt dann, dass die Anzahl der Knoten und Kanten nur konstant mal größer sein kann als die Anzahl der Flächen?

- Beweisen Sie: Unter den obigen Bedingungen hat eine Fläche im Mittel maximal 6 Kanten!
- Welche Konsequenz ergibt sich aus den obigen Beziehungen für den vollständigen Graphen mit 5 Knoten ( $K_5$ )?

## Kapitel 5: Voronoi Diagramme

- Was ist das Voronoi Diagramm einer Punktmenge  $S$  in der Ebene?  
Geben Sie eine intuitive und die formale Definition an!
- Welche Laufzeitkomplexität hat die Konstruktion des Voronoi Diagramms?  $O(\Omega(\Theta))$ , Begründung!
- Welche Aussage gilt für wachsende Kreise um einen Punkt  $x$  der Ebene?  
Welche gdw. Eigenschaft gilt, wenn  $x$  im Innern eines Bisektors liegt?  
Beweisen Sie eine Richtung dieser Aussage!
- Zeigen Sie mittels der obigen Eigenschaft:  
Genau die Orte der unbeschränkte Regionen des Voronoi Diagramms von  $S$  liegen auf der konvexen Hülle von  $S$ .  
Beide Richtungen sind zu beweisen!
- Woraus können wir folgern, dass das Voronoi Diagramm lineare Komplexität hat?
- Warum bestehen die Flächen des Voronoi Diagramms im Mittel nur aus 6 Kanten?
- Woraus ergibt sich die untere Schranke von  $\Omega(n \log n)$  für die Konstruktion des Voronoi Diagramms?
- Was ist die klassische Anwendung des VDs und wie haben wir diese umgesetzt.  
Erläutern Sie die Streifenmethode inklusive Laufzeit für das Nächstes-Postamt-Problem.
- Warum kann das All-Nearest-Neighbor Problem für eine Punktmenge  $S$  durch das  $VD(S)$  in linearer Zeit gelöst werden?
- Beweisen Sie, dass der nächste Nachbar  $q$  eines Punktes  $p$  aus einer Punktmenge  $S$  im  $VD(S)$  in einer Nachbarregion liegen muss.
- Was ist der MST der Punktmenge  $S$ ?  
Wie kann man mit dem MST die TSP-Route der Punktmenge approximieren?  
Begründen Sie den Approximationsfaktor von 2.
- Warum ist das VD für die Berechnung des MST nützlich?
- Wie funktioniert der Kruskal-Algorithmus für eine Punktmenge  $S$ ?  
Welche Laufzeitverbesserung ergibt sich durch die Verwendung von  $VD(S)$ ?  
Begründen Sie Ihre Antwort!
- Was ist die Delaunay Triangulation einer Punktmenge  $S$ ?
- Welche Eigenschaft hat ein Delaunay-Dreieck bezüglich des Umkreises?
- Welche Eigenschaft der Delaunay Triangulation gilt bezüglich der Winkel der Dreiecke?
- Skizzieren Sie den Beweis, dass die  $DT(S)$  unter allen Triangulationen die größte Winkelgröße besitzt.

## Kapitel 6: Konstruktion Voronoi Diagramme

- Inkrementelle Konstruktion: Welche Schritte werden beim Einfügen eines neuen Punktes durchgeführt?  
Welche Laufzeit ergibt sich, wenn das Verfahren naiv implementiert wird?  
Begründen Sie Ihre Aussage!
- Was bedeutet es, dass ein Punkt  $p \notin S_i$  mit einem Dreieck aus  $DT(S_i)$  in Konflikt steht?
- Erläutern Sie die Bedeutung von Vater und Stiefvater für die Konstruktion des Delaunay-DAGs.
- Erläutern Sie, wieso das Einfügen des  $i$ -ten Punktes in den  $DAG_{i-1}$  in erwarteter Laufzeit  $O(\log i)$  durchgeführt werden kann, wenn alle Eingabereihenfolgen gleich wahrscheinlich sind!
- Erstellen Sie den Delaunay DAG für eine gegebenen Menge von 6 Punkten!
- Wieviele Konflikte gibt es im worst-case?

Welche Laufzeit und welche Platzkomplexität hat das Verfahren im worst-case?

Geben Sie ein Beispiel dafür an!

- Konstruktion des VDs mittels Sweep:

Warum wird die Sweepline als Objekt hinzugefügt?

Wie sieht die SSS aus?

Welche Eigenschaft gilt für die Wellenfront?

Welche DS wird dafür verwendet?

Welche Ereignisse gibt es?

Wie werden diese Ereignisse bearbeitet?

Welche Laufzeit ergibt sich für den Sweep? Begründung!

Wie ist die Komplexität der Wellenfront? Beweis!

Warum gibt es nicht mehr als  $O(n)$  Ereignisse (mit Sparregel!)?

- Welche Erweiterungen für das klassische Voronoi-Diagramm gibt es?

- Welche Struktur hat der Bisektor zweier Liniensegmente?

Begründen Sie Ihre Antwort!

- Wie ist eine konvexe Distanzfunktion definiert?

Geben Sie Beispiele an!

- Beweisen Sie: Die Regionen bezüglich einer konvexen Distanzfunktion sind stets sternförmig!

Was folgt daraus für die Regionen des Diagramms?

- Welcher Zusammenhang existiert zwischen der Konvexen Hülle in 3D und der Delaunay Triangulation in 2D?

Skizzieren Sie den Beweis dafür, dass ein Delaunay Dreieck für  $p, q, r$  in 2D

und eine Fläche der unteren Konvexen Hülle der projizierten Punkte  $p', q', r'$  in 3D eins zu eins korrespondieren!

Wie sieht die Transformation formal aus?

## Kapitel 7: Motion Planning, Pledge/BUG/Steuerwort

- Wenden Sie den Pledge-Algorithmus auf diese Beispielszene an!

Erläutern Sie die genaue Vorgehensweise!

- Welche Aussage gilt bezüglich der Korrektheit des Pledge-Algorithmus?

Skizzieren Sie die Beweisidee!

- Beweisen Sie: Falls der Pledge-Algorithmus nicht terminiert, wird bis auf ein endliches Anfangsstück ein Weg  $\gamma$  immer wieder durchlaufen!

Zeigen Sie: Dieser Weg hat keine Selbstschnitte!

- Formulieren Sie die Aufgabenstellung, die mit dem BUG-Algorithmus gelöst werden soll!

Beschreiben Sie die Idee des BUG-Algorithmus!

- Welche Aussage gilt bezüglich der Korrektheit gilt für den BUG-Algorithmus?

Formulieren Sie die Beweisidee!

- Geben Sie die Weglänge des BUG-Algorithmus an und begründen Sie diese!

- Warum reichen Kompass (zum Ziel), Kontaktsensor und beliebiger Speicher stets aus, um in einer polygonalen Szene zum Ziel zu gelangen?

- Wie bestimmt man ein Universelles Steuerwort  $s$  aus den Bewegungen

T (Richtung Ziel)

L (Linke Hand Regel Hindernis)

R (Rechte Hand Regel Hindernis)

so dass  $s$  angewendet auf jeden Punkt der Szene zum Ziel führt!

## Kapitel 7: Motion Planning, Kompetitivität, m-Wege Suche

- Definieren Sie den Begriff Kompetitivität!

- Beschreiben Sie das Bin-Packing Problem!

Welchen komp. Faktor können wir für First-Fit garantieren?

Beweisen Sie diese Aussage!

Welche Untere Schranke an den komp. Faktor existiert für First-Fit?

Geben Sie die Konfiguration für diese Schranke an!

Warum muss dieses Beispiel beliebig viele Pakete enthalten (von  $n$  abhängen)?

- Beschreiben Sie das Problem der 2-Wege Suche!

Wie kann man jede vernünftige Strategie parametrisieren?

Wie beschreibt man den worst-case Fall an den komp. Faktor durch eine Ungleichung mit Summenformel?

- Zeigen Sie: Die Strategie  $x_i=2^i$  garantiert einen komp. Faktor von 9!

- Was bedeutet Unimodalität für ein Funktional?

Zeigen Sie, dass Unimodalität für das entsprechende Funktional der 2-Wege(m-Wege)-Suche gilt!

- Welche Folgerung erlaubt das Theorem von Gal?

Optimieren Sie damit das Funktional der 2-Wege Suche!

- Warum ist die Suche nach einem Punkt in einem Polygon im Allgemeinen nicht kompetitiv lösbar?

- Wie sieht eine beliebige Strategie für die m-Wege Suche aus?

Welche Parameter haben wir für die nächsten Besuche gewählt?

- Was ist eine periodische und monotone Strategie?

Was ist der Vorteil für eine Analyse?

- Skizzieren Sie den Beweis:

Jede C-komp. Strategie zur m-Wege Suche kann in eine monotone und periodische Strategie mit dem gleichen Faktor C umgewandelt werden!

- Randomisierung: Angenommen, der Gegenspieler (darf das Ziel festlegen) weiß nicht,

in welche Richtung wir eine Doublingstrategie  $x_i=2^i$  im 2-Wege Fall starten:

Zeigen Sie, dass der erwartete Faktor bei  $1/2(5+9)=7$  liegt!