Grundlagen der Algorithmische Geometrie SS 2015
Übungsblatt 6
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Montag 01.06.2015, bis 14:30 Uhr

- *In der Pfingstwoche, 25. - 29.05. finden keine Vorlesungen und Tutorien statt.*
- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer und den Namen angeben.*
- *Es werden nur Einzelabgaben angenommen.*

Aufgabe 1: Anzahl der Kanten von Triangulationen 4 Punkte

Eine Triangulierung einer Punktmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ ist eine maximale Menge von Liniensegmenten, deren Endpunkte zu S gehören, und die sich höchstens in ihren Endpunkten schneiden. Gegeben seien n Punkte in allgemeiner Lage (keine 3 Punkte kollinear) in der Ebene.

a) Zeigen Sie: Jede Triangulierung der n Punkte hat genau $3n - r - 3$ viele Kanten, wobei r die Anzahl der Kanten der konvexen Hülle bezeichnet.

b) Wir suchen eine Triangulierung von Punkten in der Ebene, bei der jeder Knoten genau Grad 5 hat. Wieviele Punkte muss eine solche Triangulierung mindestens besitzen? Wieviele Punkte muss die konvexe Hülle haben? Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel an!

Aufgabe 2: Wächter für die Hälfte 4 Punkte

Wie viele Wächter benötigt man im schlimmsten Fall, um mindestens die Hälfte der Fläche eines einfachen Polygons mit n Ecken zu bewachen?

Beweisen Sie für Ihr Ergebnis $w(n)$, dass $w(n)$ Wächter für jedes Polygon mit n Ecken ausreichen, und dass es jeweils ein Polygon mit n Ecken gibt, für das weniger Wächter nicht reichen. Sie können sich dabei auf Polygone mit $n = 6k$ Ecken, $k \in \mathbb{N}$, beschränken.

Bitte wenden

Aufgabe 3: **Sichtbarkeit und Kern** 4 Punkte

Wir betrachten ein einfaches Polygon P und zwei Punkte p und q in P, so dass $\text{vis}(q) \subseteq \text{vis}(p)$ gilt; d. h. der Punkt p „sieht mehr“ als der Punkt q.

Zeigen Sie:

$$Ker(\text{vis}(p)) \subseteq Ker(\text{vis}(q))$$

Mit anderen Worten: Je *mehr* ein Punkt in einem Polygon sehen kann, desto *kleiner* wird der Kern seines Sichtbarkeitspolygons.

Sie dürfen benutzen, dass für einen beliebigen Punkt p in einem beliebigen einfachen Polygon P, die Beziehung $Ker(P) \subseteq Ker(\text{vis}(p))$ gilt (siehe Übungsaufgabe 4.16 im Buch “Algorithmische Geometrie”, R. Klein, 2. Auflage).