Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner

Algorithmen und Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2014
Abgabe: 30.04.2014, 12:30 Uhr

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

4+2 Punkte

(a) Wir betrachten nicht leere Mengen M_i, $i = 1, 2, \ldots$, sowie die Menge $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Zeigen Sie, dass M **genau dann** abzählbar ist, wenn alle Mengen M_i abzählbar sind.

(b) Welche Mächtigkeit besitzt die Menge aller nicht entscheidbaren Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Hinweis: Nutzen Sie Wissen aus der Vorlesung und Aufgabenteil (a).

Aufgabe 3.2

3+3 Punkte

Seien L_1 und L_2 entscheidbare Sprachen über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass

(a) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\overline{L_1} := \Sigma^* \setminus L_1$ und

(b) $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 w_2 \in \Sigma^* : \ w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

entscheidbare Sprachen sind.

Aufgabe 3.3

2+2+2 Punkte

Zeigen sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $H_{\leq 42} = \{\langle M \rangle : \ M$ hält auf jeder Eingabe nach höchstens 42 Schritten$\}$,

(b) $\text{TAPE}_{\text{linear}} = \{\langle M \rangle w : \ M$ benutzt bei Eingabe w nur Bandzellen mit Index $i \in \{-|w|, \ldots, |w|\}\}$,

(c) $L_{q_0} = \{\langle M \rangle : \ M$ verlässt Zustand q_0 bei leerer Eingabe$\}$,

Die Bandzellen seien von links nach rechts aufsteigend durchnummeriert, wobei die Bandzelle, auf der der Lese-Schreib-Kopf zu Beginn steht, die Nummer 1 besitzt.

Präsenzaufgabe

Zeigen oder widerlegen sie, dass die Sprache

$$L_{q_3} = \left\{ \langle M \rangle w : \begin{array}{l} M \text{ ist Turingmaschine mit mindestens drei Zuständen und} \\ \text{erreicht } q_3 \text{ bei Eingabe } w \text{ nach endlich vielen Schritten} \end{array} \right\}$$

entscheidbar ist.