Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2013
Übungsblatt 4
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Für jede Aufgabe werden bis zu vier Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Seien k konvexe Polygone $P_1, \ldots, P_k$ gegeben, von denen jedes höchstens m Ecken habe. Die Polygone können sich überschneiden. Gesucht ist $ch(\bigcup_{1 \le i \le k} P_i)$.

Geben Sie einen Algorithmus an, der diese konvexe Hülle in Zeit $O(hk \log m)$ berechnet, wobei h die Anzahl der Ecken der resultierenden konvexen Hülle ist.

(Benutzen Sie, dass man die gemeinsamen Tangenten zweier konvexer Polygone mittels binärer Suche ermitteln kann).

Aufgabe 2:

Benutzen Sie den Algorithmus aus der vorhergehenden Aufgabe, um die konvexe Hülle von n Punkten in der Ebene zu berechnen:

a) Teilen Sie dazu für ein vorher gewähltes $m < n$ die Punktmenge in $\lceil n/m \rceil$ disjunkte Teilmengen auf, die alle höchstens m Punkte enthalten (ohne vorher zu sortieren). Berechnen Sie die konvexen Hüllen dieser Teilmengen. Benutzen Sie dann den Algorithmus aus der vorherigen Aufgabe, um die Gesamthülle zu berechnen. Folgern Sie, dass der Algorithmus $O(n \log h)$ Zeit benötigt, falls Sie am Anfang $m = h$ gewählt haben.

b) Da wir am Anfang h aber noch nicht kennen, müssen wir die Wahl von m selber auch zum Bestandteil des Algorithmus machen: Modifizieren Sie den Algorithmus, indem Sie ihn zunächst mit kleinem m ausführen, ihn aber abbrechen, sobald der Algorithmus feststellt, dass $m < h$ ist. Steigern Sie m in passenden Schritten und folgern Sie, dass der resultierende Algorithmus Laufzeit $O(n \log h)$ hat.

Aufgabe 3:

Sei $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung (d.h., $f(x) = H(x) + a$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$, einen Homomorphismus $H\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$).

Zeigen Sie: Ist $C \subset \mathbb{R}^m$ eine konvexe Menge, so ist auch das Bild von C unter f, $f[C]$, eine konvexe Menge.