Algorithmen und
Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2017/18

Abgabe: 17.10.2017, 12.00 Uhr
Besprechung: KW 43

PD Dr. Elmar Langetepe
David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 1

In der Vorlesung haben wir die O-, Ω- und Θ-Notation eingeführt. Außerdem definieren wir:

$$f \in o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = 0 \text{ und } f \in \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \infty.$$

Aufgabe 1.1: (6 Punkte)

Es seien $p_1(n) = a_1 \cdot n^{d_1}$ und $p_2(n) = a_2 \cdot n^{d_2}$ Polynome vom Grad d_1 bzw. d_2, wobei die Koeffizienten a_1 und a_2 positiv sind. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

(a) $p_1 = \Theta(p_2) \iff d_1 = d_2$,

(b) $p_1 = o(p_2) \iff d_1 < d_2$,

(c) $p_1 = \omega(p_2) \iff d_1 > d_2$.

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass für zwei Funktionen f und g höchstens eine der drei Beziehungen $f = o(g)$, $f = \Theta(g)$ und $f = \omega(g)$ gilt.

Aufgabe 1.2: (3 Punkte)

Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Verwenden sie eines der Symbole aus $\{O, o, \Omega, \omega, \Theta, -\}$, um eine Funktion f einer Zeile mit einer Funktion g einer Spalte in Beziehung zu setzen. Versuchen Sie, so genau wie möglich zu sein. Beispiel: Für $f(n) = n^3$ und $g(n) = n^4$ gilt $f = o(g)$. Der entsprechende Eintrag sollte also „o“ und nicht nur „O“ sein. Stehen die Funktionen in keiner Beziehung, tragen Sie „$-$“ ein.

In der Tabelle stehe $s(n)$ abkürzend für die Funktion $s(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ n & \text{falls } n \text{ gerade}. \end{cases}$

	$\log_2(n)$	$s(n)$	5	2^n	$1/n$	n	e^n
$\log_2(n)$							
$s(n)$							
5							
2^n							
$1/n$							
n							
e^n							

Hinweis: Es genügt, einen der beiden Teile unterhalb oder oberhalb der Diagonale auszufüllen und zu beschreiben, wie sich die restlichen Einträge ergeben.

Aufgabe 1.3: (3+2+2 Punkte)

Sei A ein Feld mit den Einträgen $1, \ldots, n$ in beliebiger Reihenfolge. Betrachten Sie folgenden Algorithmus.

```
Algorithmus(A)
  for i = 1, ..., n − 1 do
      Bestimme das Minimum der Einträge A[i], ..., A[n] und den zugehörigen Index j.
      if j ≠ i then Vertausche A[i] und A[j].
  end for
  return A
```

(a) Welches Problem löst der Algorithmus? Beweisen Sie Ihre Aussage mit Hilfe einer Invariante.

(b) Wie viele Vergleiche werden in Durchlauf i durchgeführt? Wie viele Vergleiche benötigt der Algorithmus insgesamt? Verwenden Sie Θ-Notation und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

(c) Wie viele Vertauschungen führt der Algorithmus mindestens/höchstens durch? Geben Sie jeweils eine Eingabe an, bei der entsprechend oft vertauscht wird.

Aufgabe 1.4: (2+5+1 Punkte)

Wir wollen die Anzahl von Vergleichen von *Insertionsort* auf einem Feld mit n Einträgen theoretisch und empirisch untersuchen.

(a) Wie viele Vergleichen führt *Insertionsort* mindestens/höchstens durch? Geben Sie jeweils eine Eingabe an, bei der entsprechend oft verglichen wird.

(b) Erzeugen Sie für $n = 1, \dots, 500$ n-mal hintereinander ein Feld mit n zufälligen Einträgen und führen Sie *Insertionsort* auf diesem Feld aus. Bestimmen Sie für jedes n die minimale, die maximale und die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen von *Insertionsort* und stellen Sie diese als Graphen in Abhängigkeit von n dar. Zeichnen Sie zusätzlich die Funktionen

$$f_1(n) = 10n\,, \qquad f_2(n) = 10 \cdot n\ln(n)\,, \qquad f_3(n) = \frac{n^2}{4} \quad \text{und} \quad f_4(n) = \frac{n^2}{2}$$

in das Diagramm ein.

Hinweis: Zur Darstellung eignet sich zum Beispiel *gnuplot*.

(c) Welche der Funktionen $f_1, \dots, f_4$ beschreibt die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen am besten?

Aufgabe 1.5: (6 Zusatzpunkte)

Gegeben sei ein Feld A der Länge n mit ganzen Zahlen als Einträgen. Wir betrachten alle Paare (ℓ, r) von Indizes mit $1 \le \ell \le r \le n$. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ein Paar (ℓ, r) bestimmt, für das die Summe $\sum_{i=\ell}^{r} A[i]$ minimal ist. Bestimmen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

Hinweis: Falls es die Analyse vereinfacht, können Sie davon ausgehen, dass n eine Zweierpotenz ist.