4.0 Elementares zu endlichen Zwei-Personen-Nullsummen-Spielen

Begründung: v. Neumann, Morgenstern, 1943
Ziel: Analyse des besten wirtschaftlichen Verhaltens ohne Annahme, daß alle Mitspieler "rational" handeln

anschaulich:

Spiel: Menge von Regeln, die eindeutig festlegt, welche Züge jeder Spieler in jeder Situation machen kann.

Partie: Instanz eines Spiels, eine zulässige Folge von Zügen, von Anfang bis Ende.

endliches Spiel:
- in jeder Situation nur endlich viele Züge möglich
- es gibt Schranke für maximale Länge einer Partie

2-Personen-Spiel: es nehmen nur 2 Spieler teil (Weiß, Schwarz)

Nullsummenspiel: Für jeden Endzustand ist die Auszahlung an Weiß festgelegt; sie ist von Schwarz zu leisten (kann auch negativ sein!)

Beispiele: Nimm, Mühle, Schach (!), ...
Monopoly zu Zweit, Mensch-Ärger-Dich-Nicht zu Zweit
Poker zu Zweit, Mau-Mau, ..

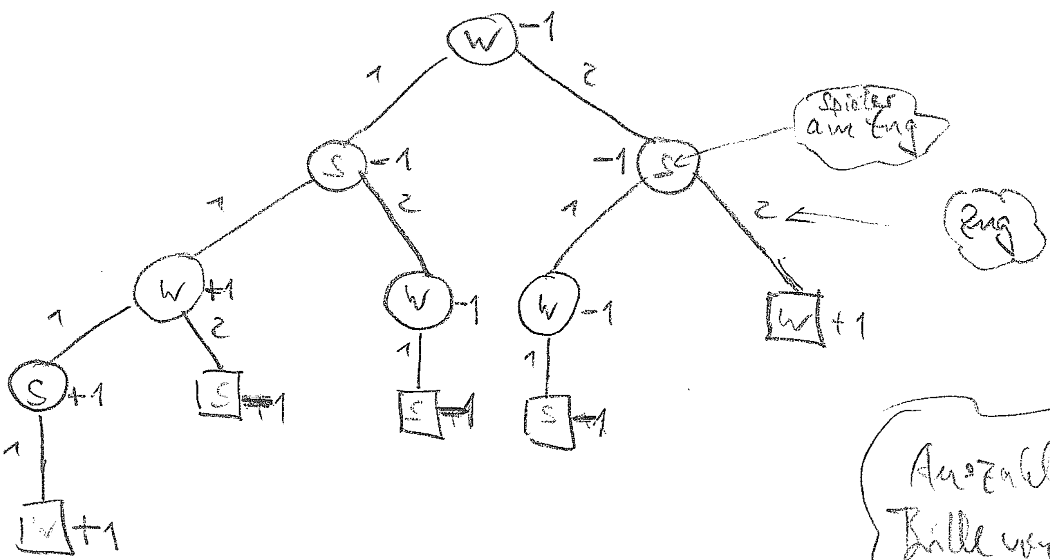
Zwei Unterschiede zwischen diesen Spielen:

(1) bei Monopoly, Mensch-Ärger-Dich-Nicht wird "gewürfelt", d.h. eine unabhängige Instanz trifft Zufallsentscheidungen
(bringt Erwartungswerte in's Spiel; ansonsten harmlos)

(2) Bei Poker, Mau-Mau weiß man nicht über Situation und Züge des Gegners Bescheid (welches Blatt? was getauscht?)
(wesentlich!)

<u>Beispiel 4.0.1</u> Gegeben 4 Hölzchen. Zwei Spieler nehmen abwechselnd 1 oder 2 Hölzchen fort. Wer das letzte nimmt, hat verloren. (Variante von "Nimm")

<u>Extensive Darstellung</u> durch <u>Spielbaum</u>: (endlich!)



Auszahlung durch Brille von Weiß betrachtet

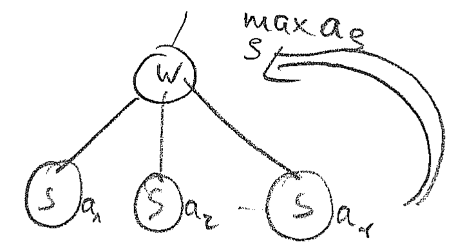
Beschrifte jeden Knoten von

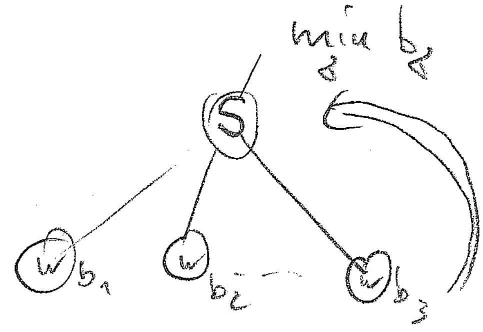
Weiß mit der Maximalauszahlung, die Weiß in dieser Situation erzwingen kann, (egal wie Schwarz spielt

Schwarz mit der Minimalauszahlung an Weiß, die Schwarz in dieser Situation erzwingen (egal wie Weiß spielt) (unte

<u>hier</u>: Sieg von Weiß: +1 Sieg von Schwarz: −1. Allgemein:

Beschriftung der Knoten des Spielbaums bottom-up, bei Blätter stark nach folgenden Regeln





<u>hier:</u> Weiß kann keine größere Auszahlung als -1 erreichen (wenn Schwarz gut spielt), und Schwarz hat eine Strategie, die ihm -1 (also Gewinn von 1) garantiert!

Strategie: (von Schwarz) (in einem Spiel, in dem Weiß und Schwarz abwechselnd ziehen)

Folge von Funktionen $f_i : (w_1, s_1, w_2, s_2, \ldots, w_i) \longmapsto s_i$

(genügen würde $\tilde{f}_i : (w_1, w_2, \ldots, w_i) \longmapsto s_i$, denn Schwarz kennt seine früheren Züge)

dabei: w_i, s_j jeweils aus den durch die Spielregeln erlaubten Mengen.

→ In Beispiel 1 hat Schwarz folgende Strategien zur Verfügung:

schw$_1$	schw$_2$	schw$_3$	schw$_4$
$f_1 : \begin{cases} (1) \mapsto 1 \\ (2) \mapsto 1 \end{cases}$	$f_1 : \begin{cases} (1) \mapsto 1 \\ (2) \mapsto 2 \end{cases}$	$f_1 : \begin{cases} (1) \mapsto 2 \\ (2) \mapsto 1 \end{cases}$	$f_1 : \begin{cases} (1) \mapsto \\ (2) \mapsto \end{cases}$
$f_2 : \{ (1,1,1) \mapsto 1$	$f_2 : \{ (1,1,1) \mapsto 1$		

Diese Strategien sind beiden Spielern vor Spielbeginn bekannt

Weiß hat folgende Strategien:

weiß$_1$	weiß$_2$	weiß$_3$
$g_1 : \{ 1$	$g_1 : \{ 1$	$g_1 : \{ 2$
$g_2 : \begin{cases} (1,1) \mapsto 1 \\ (1,2) \mapsto 1 \end{cases}$	$g_2 : \begin{cases} (1,1) \mapsto 2 \\ (1,2) \mapsto 1 \end{cases}$	$g_2 : \{ (2,1) \mapsto 1$

Damit <u>strategische Form</u> des Spiels als Auszahlungsmatrix A für Weiß (45.4)

$$= (a_{ij})$$

$$\begin{array}{c|cccc} & schw_1 & schw_2 & schw_3 & schw_4 \\ \hline weiß_1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ weiß_2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ weiß_3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

mit a_{ij} = Auszahlung an Weiß, wenn
er Strategie $weiß_i$
→ Schwarz Strategie $schw_j$ wählt.

Wieviel wird Weiß bei Wahl von Strategie i mindestens gewinnen?

$\min_j a_{ij}$ Zeilenminimum ($= -1$ in jeder Zeile)

Welche Strategie i maximiert diesen Wert? (Jedes Das) i_0 mit

$$\min_j a_{i_0 j} = \max_i \min_j a_{ij}$$ (Maximum der Zeilenminima)

(hier: $i_0 \in \{1,2,3\}$)

<u>Bem:</u> Die Spieler "brauchen gar nicht mehr zu spielen", nach Wahl der Strategien liegt alles fest (Witze per Nummer)

(unrealistisch! Freude liegt im Machen, selbst bei Spielen wie russischem Roulette mit negativem Erwartungswert)

Analog:

Wieviel kann Schwarz bei Wahl von Strategie j höchstens verlieren?

$$\max_i a_{ij} \quad \text{Spaltenmaximum}$$

Welche Strategie minimiert diesen Wert? (Jedes) Das j_0 mit

$$\max_i a_{ij_0} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Minimum der Spalten-maxima

(hier: $j_0 = 3$)

Lemma 4.0.2 Für jedes endliche 2-Personen-Nullsummenspiel gilt

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij} \quad (*)$$

Mindestgewinn von ~~Spieler 1~~ weiß

Höchster Verlust von ~~Spieler 2~~ schwarz

Bew: $\forall i,j: \quad \min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij}$

$$\Rightarrow \forall j: \max_i \min_j a_{ij} \le \max_i a_{ij}$$

$\Rightarrow$ Beh. durch $\min_j$ rechts.

Beispiel 4.0.1 (Hölzchennehmen) gilt sogar die Gleichheit! (beide Werte $= -1$).

Def. γ ist eindeutig $:\Leftrightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} =: v$ = Wert des Spiels.

Gesehen: Hölzchen hat Wert -1

Beispiel 4.0.3 Stein-Schere-Papier

rock-paper-scissors

Strategische Form, hier natürlich:

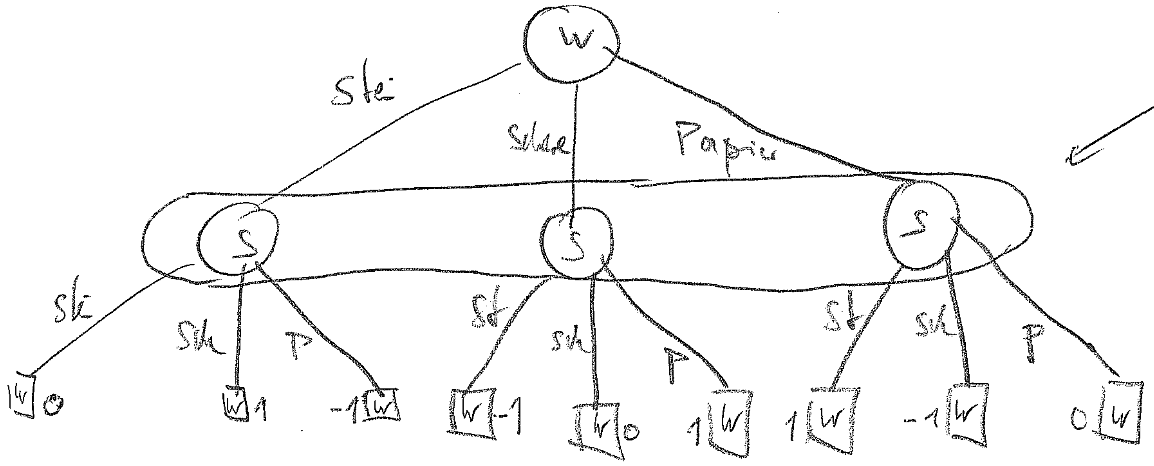
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Stein} & \text{Schere} & \text{Papier} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Stein} \\ \text{Schere} \\ \text{Papier} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(schiefsymmetrisch)

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1 < 1 = \min_j \max_i a_{ij}$$

Nicht eindeutig!

Unterschied zum Hölzchen Nehmen klar bei Betrachtung der extensiven Form des Spiels:



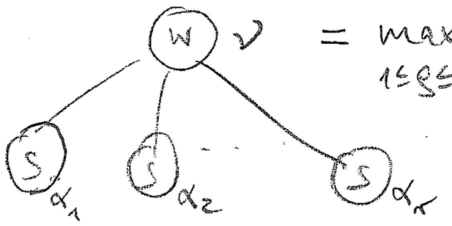
für Schwarz ununterscheidbar; Informationsmenge

Def.: Γ ist ein Spiel mit vollständiger Information, falls jeder Spieler sämtliche vorausgehenden Züge der Mitspieler kennt. (in jeder Situation)

Daß das Spiel in Beispiel 4.0.1 eindeutig war, ist kein Zufall:

Theorem 4.0.4 Jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit vollständiger Information ist eindeutig.

Beweis Betrachte den Spielbaum, beschrifte Knoten bottom-up wie oben. Sei v der Wert in der Wurzel (Startsituation von W



$$v = \max_{1 \le s \le r} \alpha_s$$

$\Rightarrow$ Weiß kann mindestens v erreichen, d.h. $v = \max_i \min_j a_{ij}$

Schwarz braucht höchstens v zu verlieren, d.h. $v = \min_j \max_i a_{ij}$

in extensiver Form. □

Rekapitulation

Endl. Zwei-Personen-Nullsummenspiel:

Darstellung in strategische Form durch Auszahlungsmatrix A für W

$$A = \text{Strategie } i \text{ von Weiß} \rightarrow \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

↑ Strategie j von Schwarz

Def: Spiel eindeutig : $\Longleftrightarrow$

$$\max_i \underbrace{\min_j a_{ij}}_{\substack{\text{Zeilenminimum,} \\ \text{d.h. Mindestgewinn} \\ \text{von Weiß bei Wahl Strat. } i}} = \min_j \underbrace{\max_i a_{ij}}_{\substack{\text{Spaltenmaximum,} \\ \text{Höchstverlust von Schwarz} \\ \text{bei Wahl Strategie } j}}$$

Gesehen: i.a. gilt nur $\leq$; aber:

Theorem 4.0.4 Jedes endl. 2-Personen-Nullsummenspiel mit vollständiger Information ist eindeutig.

z.B. Schach, Mühle, Go, Mensch-Ärgere-Dich-Nicht
chess, Merels,

Frage Was ist mit den anderen Spielen (z.B. Stein-Schere-Pa
Poker,

→ jetzt. Als technische Vorbereitung

Folgerung z.B. für Schach (Zermelo)

Entweder hat Weiß Gewinnstrategie oder
Schwarz hat Gewinnstrategie oder
jeder kann ein Remis erzwingen.

Für Mühle
Gasser '93
beide haben R
Strategie

Bem: Spielbaum von Schach zu groß für vollst. Analyse.
(partielle Analyse
möglich)

Noch eine technische Tatsache:

(i_0, j_0) heißt Sattelpunkt von Matrix A, falls

$a_{i_0 j_0}$ ist Maximum der j_0-ten Spalte und
Minimum der i_0-ten Zeile.

(in BFEV folien)

Lemma 4.05

Spiel $\mathcal{G}$ ist eindeutig $\Longleftrightarrow$ Auszahlungsmatrix A hat Sattelpunkt

Dann $a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} =:$ Wert v des Spiels

Beweis „$\Rightarrow$":

Aber
Nicht
jedes
$a_{i^* j^*}$ =
ist
(i^*, j^*)
Sattelpunkt

Die Funktion $i \longmapsto \min_j a_{ij}$ habe Maximum bei i_0
die Funktion $j \longmapsto \max_i a_{ij}$ habe Minimum bei j_0

Dann folgt:

$$\forall i: \quad a_{i j_0} \le \max_i a_{i j_0} \underset{\text{Def } j_0}{=} \min_j \max_i a_{ij} \underset{\text{Vor}}{=} \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\underset{\text{Def } i_0}{=} \min_j a_{i_0 j} \le a_{i_0 j_0}$$

$\Rightarrow$ $a_{i_0 j_0}$ ist Maximum der Spalte j_0. Ähnlich:

$$\forall j: \quad a_{i_0 j_0} \le \max_i a_{i j_0} \underset{\text{s.o.}}{=} \min_j a_{i_0 j} \le a_{i_0 j}$$

$\Rightarrow$ $a_{i_0 j_0}$ ist Minimum der Zeile i_0 $\Big\} \Rightarrow$ Sattelpunkt

Umgekehrt: Gelte

Sei (i_0, j_0) Sattelpunkt, also

$$\begin{array}{ccccc} \max\limits_i a_{ij_0} & = & \overset{\text{Sattelpunkt}}{a_{i_0 j_0}} & = & \min\limits_j a_{i_0 j} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\geq$} \\ \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} & & & & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit des Spiels mit Lemma 4.0.2. $\square$

Frage: Was ist mit Spielen mit unvollständiger Information? (Stein-Schere-Papier, Skat, Poker, ...)

Durchbruch v. Neumann / Morgenstern, 1943
Theory of Games and Economic Behavior

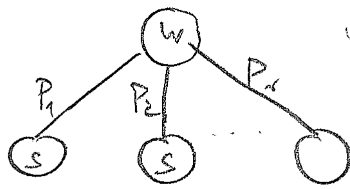
Man muß randomisieren! Dann wird jedes Spiel eindeut

Idee: den Mangel an Information über Situation (Züge des Gegners) durch zufällige Wahl von Zügen ausgleichen.

bisher betrachtete Strategien (Zeilen/Spalten der Auszahlungsmatrix)
= reine Strategien.

Um Zufall ins Spiel zu bringen:

behavioristische Strategien:
W-Verteilung an jedem Knoten.



mit $p_i \geq$
$\sum_i p_i =$

Wenn Spielbaum endlich und Speicherplatz genügend vorhanden:
Können alle Zufallsentscheidungen
und speichern sich ihre Züge alle vo
- vor Spielbeginn treffen
- als W'Verteilungen auf den reinen Strategien interpretieren.

Gesamt-W'keit der reinen Strategie = Produkte der W'keiten längs des Pfades