

## Übungsblatt 9

### **Aufgabe 9.1: Komplexität Voronoi-Diagramme und Triangulationen** (4 Punkte)

Gegeben seien  $n$  Punkte in allgemeiner Lage in der Ebene. Zeigen Sie:

1. Das Voronoi-Diagramm der  $n$  Punkte hat genau  $2n - r - 2$  viele Knoten und  $3n - r - 3$  viele Kanten, wobei  $r$  die Anzahl der Ecken auf der konvexen Hülle der  $n$  Punkte ist.
2. Jede Triangulation der  $n$  Punkte hat genau  $3n - r - 3$  viele Kanten.
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Triangulation von Punkten in der Ebene an, bei dem jeder Knoten genau Grad 5 hat. Wieviele Punkte muss eine solche Triangulation mindestens besitzen? Wieviele Punkte muss die konvexe Hülle haben?

### **Aufgabe 9.2: Komplexität einzelner Voronoi-Regionen** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass zu jedem  $n > 3$  eine Menge von  $n$  Punkten in der Ebene existiert, so dass auf dem Rand einer Voronoi-Region  $n - 1$  Knoten des Voronoi-Diagramms liegen.

### **Aufgabe 9.3: Unbeschränkte Voronoi-Regionen in $L_1$** (4 Punkte)

Sie haben für das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge  $S$  in der euklidischen Ebene gelernt, dass ein Punkt  $p \in S$  genau dann eine unbeschränkte Voronoi-Region besitzt, wenn  $p$  auf dem Rand der konvexen Hülle von  $S$  liegt.

Welche Aussagen kann man diesbezüglich über Voronoi-Diagramme unter der  $L_1$ -Metrik machen? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

### **Aufgabe 9.4: Bisektoren von Liniensegmenten** (4 Punkte)

Zu einem Liniensegment  $ab$  nennen wir den Bereich zwischen den beiden zu  $ab$  senkrechten Geraden, die durch  $a$  bzw.  $b$  verlaufen, den zu  $ab$  gehörigen Streifen.

Wir sagen, der Bisektor zweier Liniensegmente besteht aus  $n$  Stücken, wenn sich entlang des Bisektors die die Kurve bestimmende Gleichung genau  $n - 1$  mal ändert.

- a) Zeichnen Sie Beispiele für Liniensegmente  $ab$  und  $cd$ , deren Bisektor aus einem Stück, drei Stücken bzw. fünf Stücken besteht.
- b) Kann der Bisektor von zwei Liniensegmenten aus sieben Stücken bestehen, von denen keines im Durchschnitt der beiden Streifen verläuft?