Offline Bewegungsplanung: Part Feeding

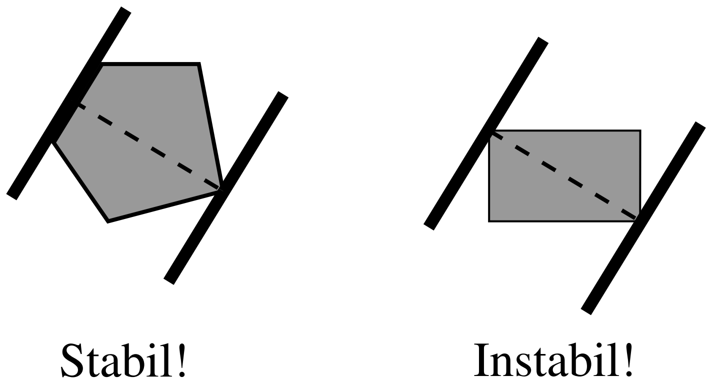
Elmar Langetepe
University of Bonn

Nützliche Annahmen

1. Greifer: Parallele Backen
2. Drehrichtung: Orthogonal zu Backen
3. Werkstück: Festes planares konvexes Polygon
4. Isoliert zwischen den Backen
5. Zunächst: Backen treffen gleichzeitig auf!(Später aufheben!)
6. Kontakt bleibt erhalten, kein Wegrutschen!
7. Keine Reibung! Kein Einklemmen!(Später aufheben!)

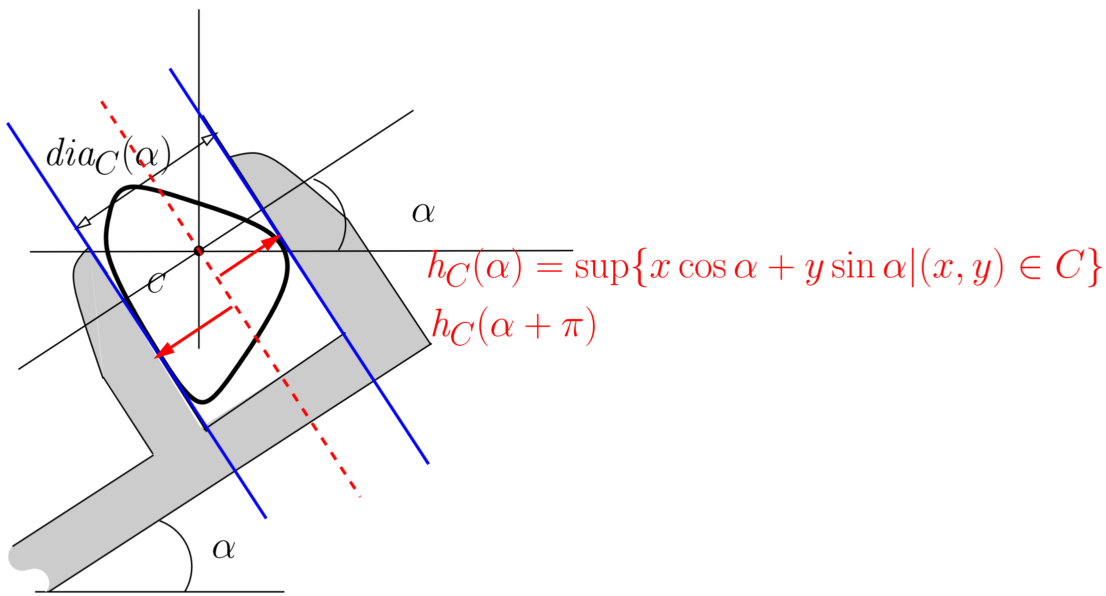
Einklemmen!

- Stabile Lage: **Stabiles Gleichgewicht**
- **Instabiles Gleichgewicht**
- Kommt praktisch nicht vor
- Abhilfe: Fehlertoleranz bei der Bewegung!



Funktionen: Definition 4.1 (i)!

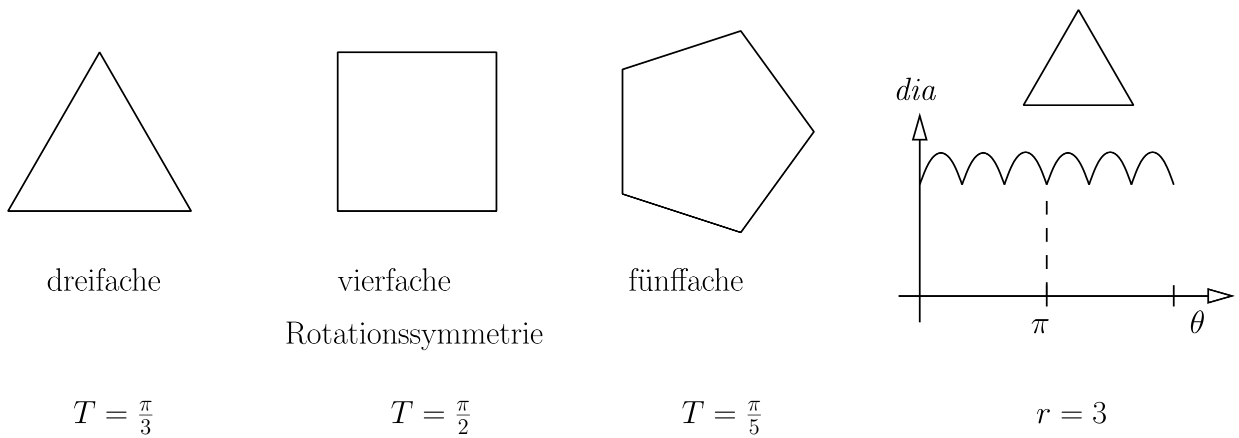
- Werkstück liegt fest
- Diameter: $\mathtt{dia} : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$
- Rotation der Backen um Winkel
- Schließen und Abstand
- Symmetrisch ab π



(i)

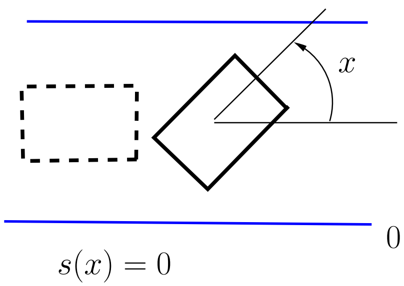
Funktionen: Definition 4.1 (i)!

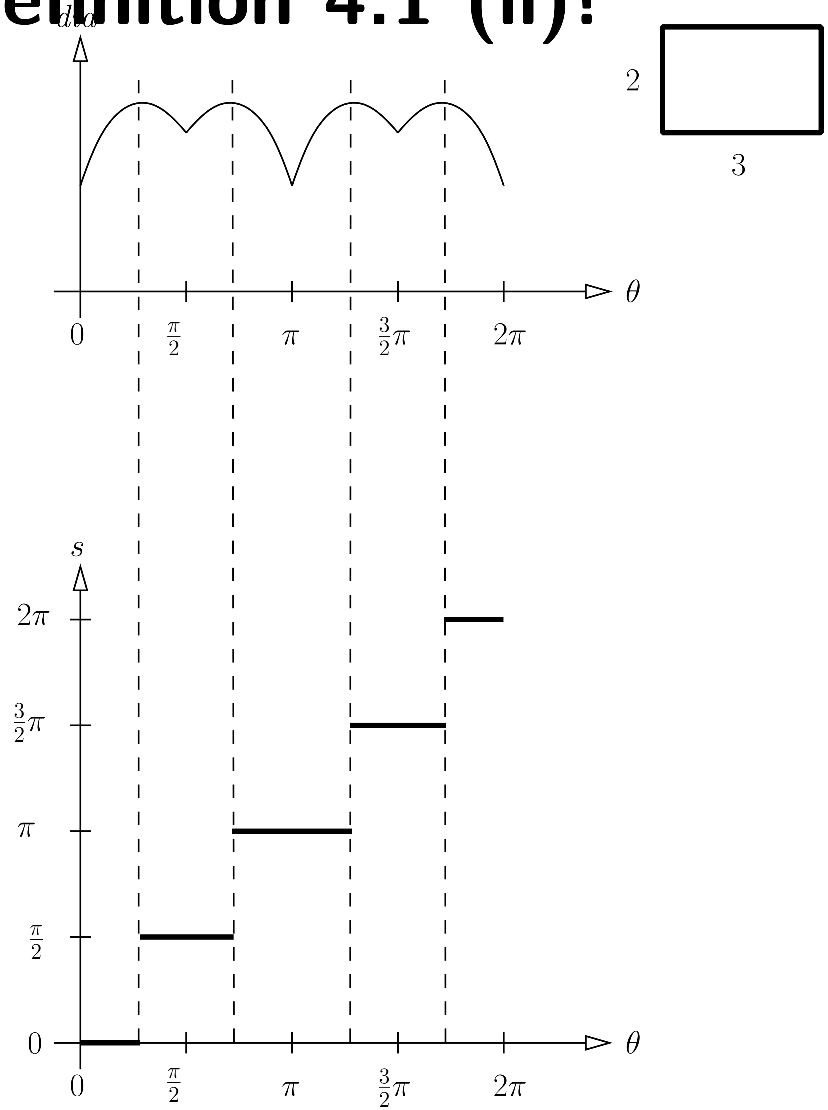
- Stabiles Gleichgewicht in lokalen Minima
- Rotationssymmetrie der konvexen Hülle: Beispiele
- r-fache Rotationssymmetrie
- Weitere Symmetrie in der Diameter Funktion
- Periode T



Funktionen: Definition 4.1 (ii)!

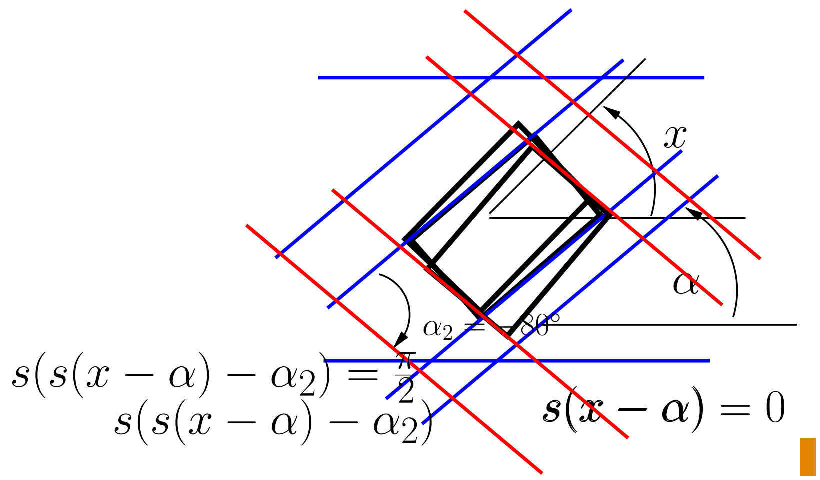
- Greiffunktion:
  $s : [0, 2\pi) \longrightarrow [0, 2\pi)$
- x Orient. bezüglich Greifer
- $s(x)$ Orient. nach dem Greifen
- Treppenfunktion: Zwischen Maxima auf Minima





Funktionen: Definition 4.1 (iii)!

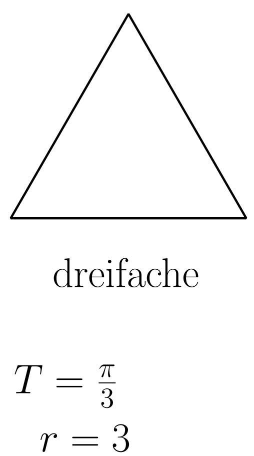
- Sequenz von Greifoperationen
- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\ldots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \ldots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- Beispiel: $y := s(x - \alpha)$, $s(y - \alpha_2)$ bezüglich Greifer!!

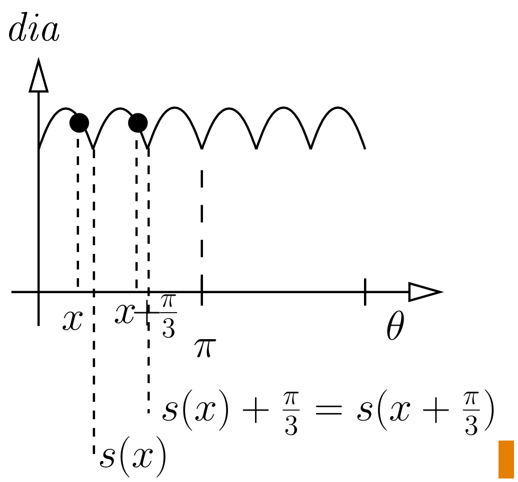


Periodizität Greiffunktion: Lemma 4.3!

i) Für Polygone mit r–facher Rotationssymmetrie ist die Greiffunktion T–periodisch mit $T = \frac{2\pi}{r(1+(r \bmod 2))}$.

ii) Für eine T–periodische Greiffunktion s gilt:
$S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T$.





Periodizität Greiffunktion: Lemma 4.3 (ii)

Für T–periodische Greiffunktion s gilt: $S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T$.

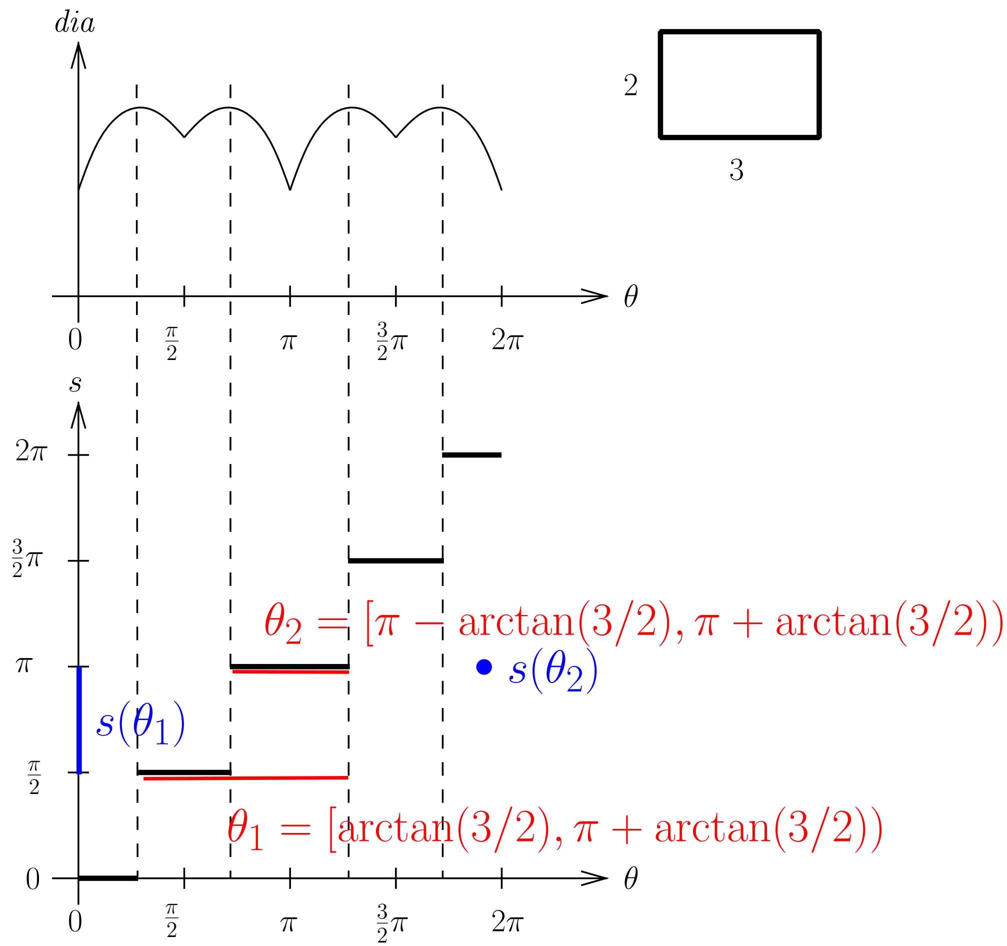
- $s(x + T) = s(x) + T$ nach Def. Periode
- θ Startposition bezügl. Greifer, $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\ldots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \ldots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta + T) = s(s(\ldots s(s(s(\theta - \alpha_1 + T) - \alpha_2) \ldots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- $\beta_1 := s((\theta - \alpha_1) + T) = s(\theta - \alpha_1) + T$
- $\beta_2 := s(\beta_1 - \alpha_2) = s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2 + T) = s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) + T$
- Induktiv: $\beta_i = s(s(\ldots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \ldots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_i) + T$
- $\beta_{i+1} = s(s(s(\ldots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \ldots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_i) - \alpha_{i+1} + T) =$ $s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \ldots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_i) - \alpha_{i+1}) + T$
- $S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T!$

Formulierung der Aufgabe: Definition 4.4!

- Werkstück W, Plan $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$
- T die kleinste Periode der zu W gehörenden Greiffunktion s
- θ beliebige Ausgangsrichtung bezüglich Greifer
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\ldots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \ldots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k) = \gamma(\theta)$.
- $\mathcal{A}$ orientiert konvexe Hülle von W **bis auf Symmetrie**, falls in der Menge der möglichen letzten Orientierungen $S(\mathcal{A}, \theta)$ genau $\frac{2\pi}{T}$ Orientierungen sind, die gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$ liegen.
- $t := \frac{2\pi}{T}$, $\gamma([0, 2\pi)) = \{o_1, o_2, \ldots, o_t\}$, $o_i := o_{i+1} + T$

Bezeichnungen!

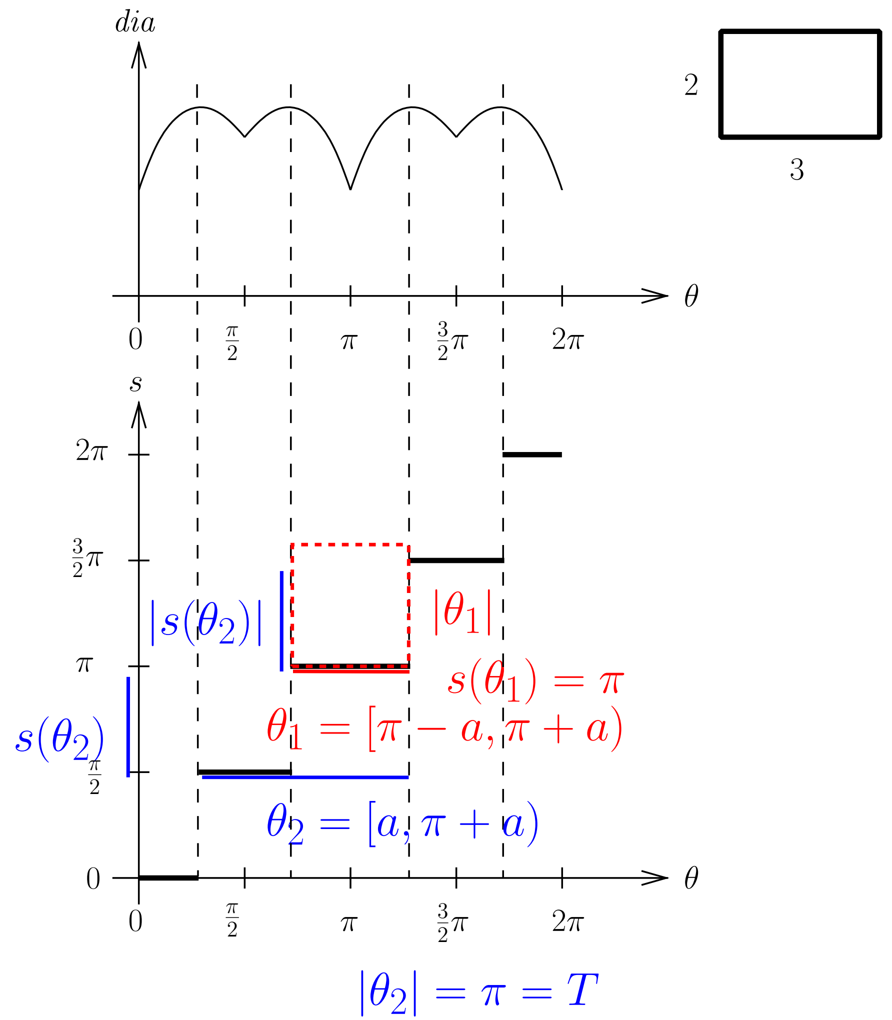
- **Intervall** Θ, zusammenhängende Teilmenge von $[0, 2\pi)$
- $|\Theta|$: Länge des Intervalls
- **s–Intervall**, halboffenes Intervall $[\xi_i, \nu_i)$, wobei ξ_i und ν_i Unstetigkeitsstellen der Greiffunktion sind
- Zu s–Intervall Θ sei das **s–Image** $s(\Theta)$ das kleinste Intervall, das die Menge $\{\, s(\theta) \text{ mit } \theta \in \Theta \,\}$ enthält



Beispiel Alg.!

- Ber. Durchmesserfkt./Greiffkt.
- kl. Periode $T = \pi$
- zwei Endorientierungen
- Bestimme längstes s–Intervall Θ_1, Greiffunktion stetig
- Hier: θ_1, $s(\theta_1) = \pi$
- Eine der beiden Richt.
- Suche s–Intervall $\Theta \leq T$ mit $|s(\Theta)| < |\Theta_1|$
- Hier θ_2: $|s(\Theta_2)| < |\Theta_1|$
- $|\theta_2| = \pi = T$ fertig!!

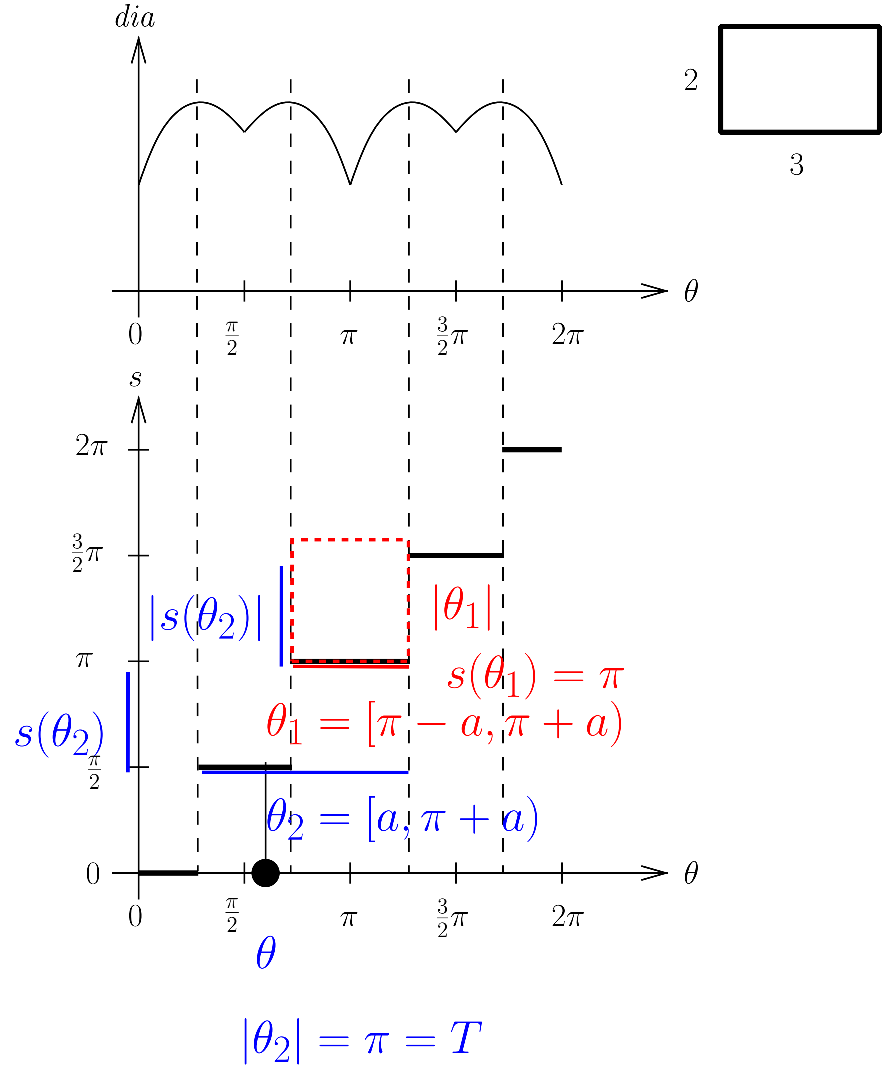
$\Rightarrow$ Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2)$, $|\Theta_2| = T$.



Beispiel Alg.!

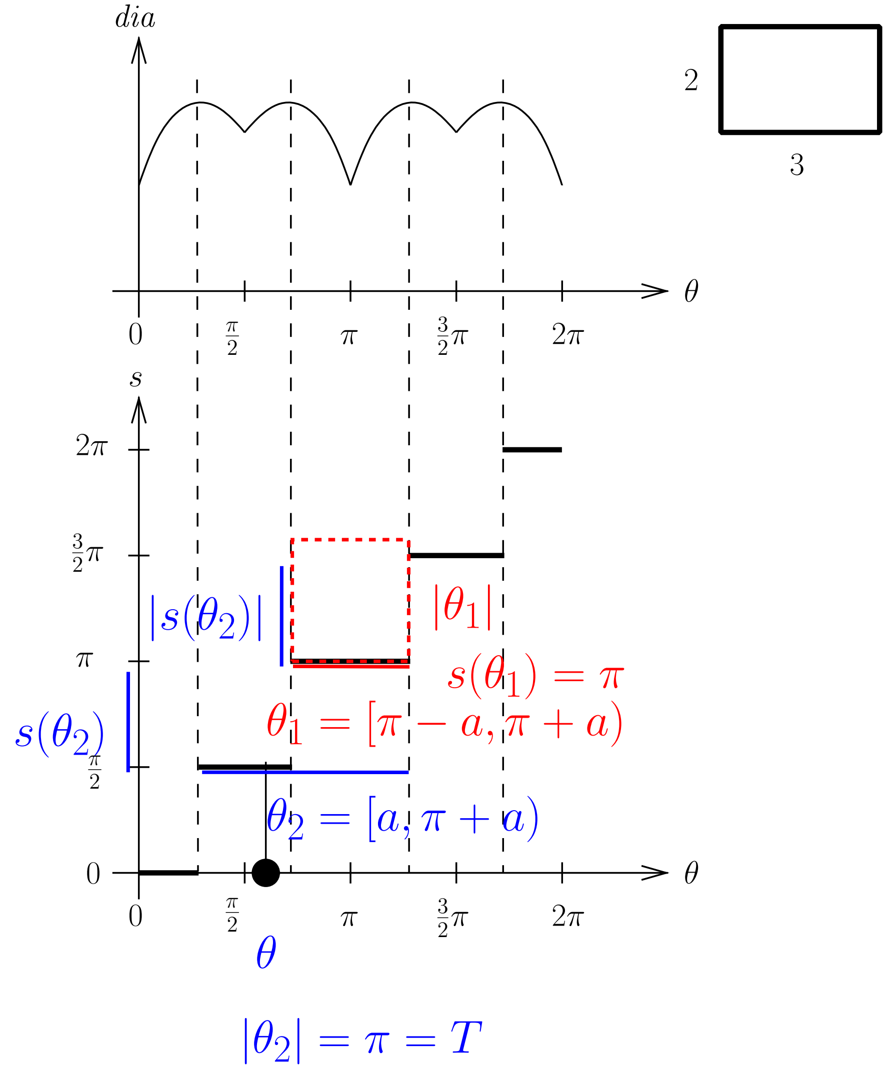
⇒ Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2)$, $|\Theta_2| = T$.

- Startorientierung: θ
- $\theta \in \Theta_2$ oder $\theta \notin \Theta_2$
- $S(\mathcal{A}, \theta) = \pi$ oder $S(\mathcal{A}, \theta) = 2\pi$
- $s(\Theta_1)$ und $s(\Theta_1) + T$
- $\alpha_2 := 0$, Ann: $\theta \in \Theta_2$:
  $s(\theta) = \gamma \in s(\Theta_2)$!
- $|s(\Theta_2)| < |\Theta_1|$: Wie γ in $s(\Theta_1)$?



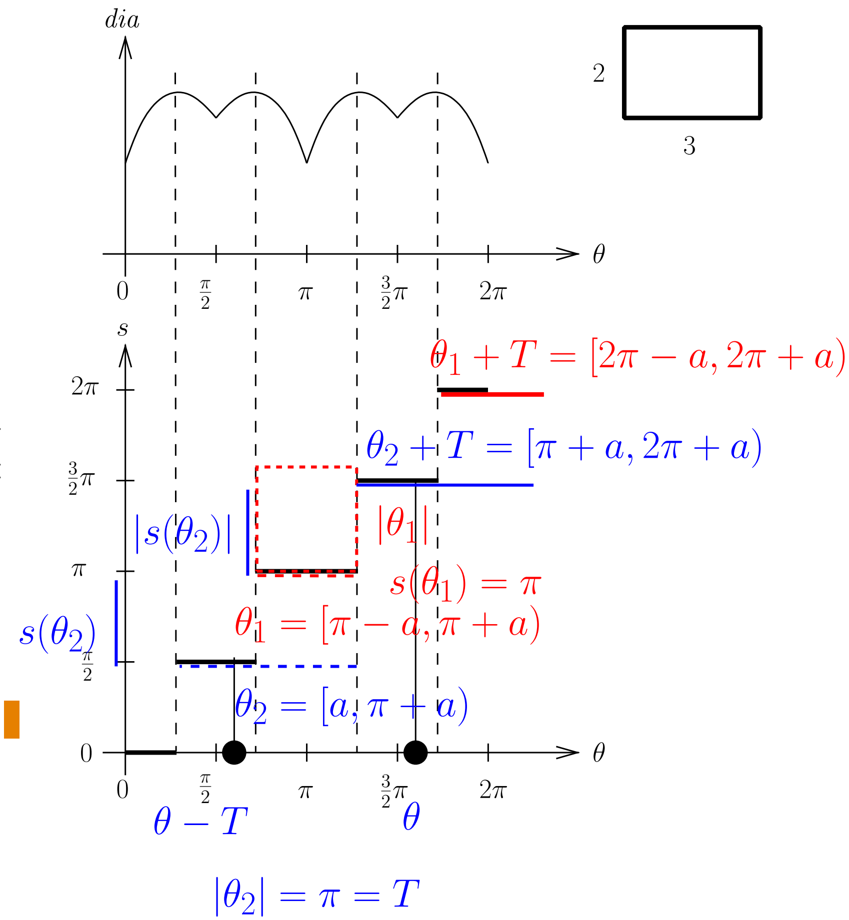
Beispiel Alg.!

- $|s(\Theta_2)| < |\Theta_1|$: Wie γ in $s(\Theta_1)$?
- $s(\Theta_2) = [s(\xi_2), s(\nu_2)]$,
  $\Theta_1 = [\xi_1, \nu_1]$
- $\xi_1 \leq s(\theta) - s(\xi_2) + \xi_1 \leq \nu_1$
- $s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)$, Bereits: $s(\theta)$
- $s(s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)) \in s(\Theta_1)$
- Mit Drehung $s(\xi_2) - \xi_1$ nach
  $s(\Theta_1) = \pi$
- In die Mitte:
  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left(|\Theta_1| - |s(\Theta_2)|\right)$
- $s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1 - \varepsilon_1)$



Beispiel Alg.!

- $\theta \notin \Theta_2$, $\theta \in \Theta_2 + T$
- $\Theta_2 + T := [\xi_2 + T, \nu_2 + T]$, $s(\Theta_2 + T) := [s(\xi_2 + T), s(\nu_2 + T)]$, $\Theta_1 + T := [\xi_1 + T, \nu_1 + T]$
- $|s(\Theta_2 + T)| < |\Theta_1 + T|$: $s(\theta) = \gamma$ Wie γ in $s(\Theta_1) + T = 2\pi$?
- $\xi_1 + T \leq s(\theta) - s(\xi_2 + T) + \xi_1 + T \leq \nu_1 + T$
- $s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)$, Bereits: $s(\theta)$
- $s(s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)) \in s(\Theta_1 + T)$
- Mit Drehung $s(\xi_2) - \xi_1$ nach $s(\Theta_1 + T) = \pi + T$
- Mitte: $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(|\Theta_1| - |s(\Theta_2)|)$



Algorithmus allgemein!

- Berechne Durchmesserfunktion und Greiffunktion, Per. T
- Bestimme das längste s–Intervall Θ_1, über dem die Greiffunktion stetig ist. Wir legen fest, dass dieses Intervall zur Periode gehört. Setze $i := 1$.
- Solange ein s–Intervall Θ mit $|s(\Theta)| < |\Theta_i|$ und $|\Theta| \leq |T|$ existiert:
  - Setze Θ_{i+1} auf das Größte dieser s–Intervalle.
  - Inkrementiere i.

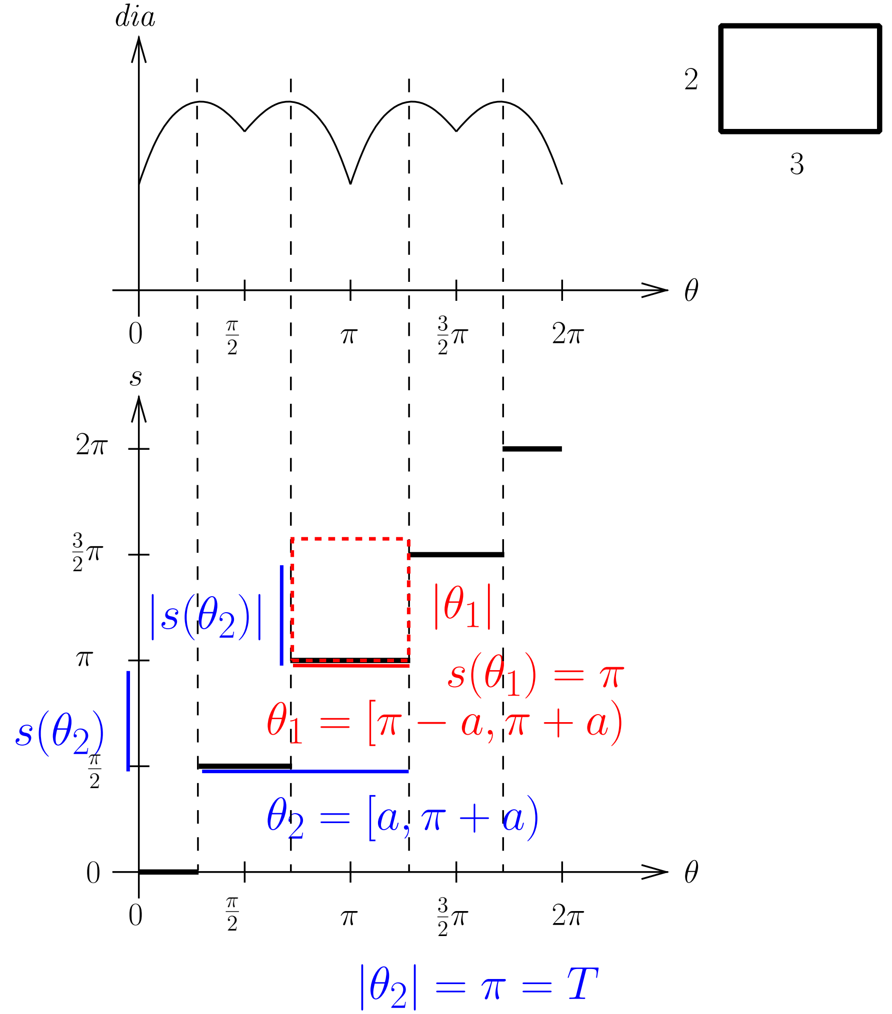
$\Rightarrow$ Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_i)$ mit $|\Theta_i| = T$.

- Berechne aus L einen Plan $\mathcal{A} = (\alpha_i, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_1)$:
  - $\alpha_i := 0$.
  - Für $j = i-1, i-2, \ldots, 1$: $\alpha_j := s(\xi_{j+1}) - \xi_j - \varepsilon_j + \alpha_{j+1}$.
    Dabei ist $\varepsilon_j = \frac{1}{2}\left(|\Theta_j| - |s(\Theta_{j+1})|\right)$ eine Fehlertoleranz, u.a. zur Vermeidung instabiler Gleichgewichte.

Beispiel Alg.!

- Ber. Durchmesserfkt./Greiffkt.
- Bestimme längstes s–Intervall Θ_1, Greiffunktion stetig
- Solange s–Intervall Θ mit $|s(\Theta)| < |\Theta_i|$ ex.:
  - Setze Θ_{i+1} auf das Größte dieser s–Intervalle.
  - Inkrementiere i.

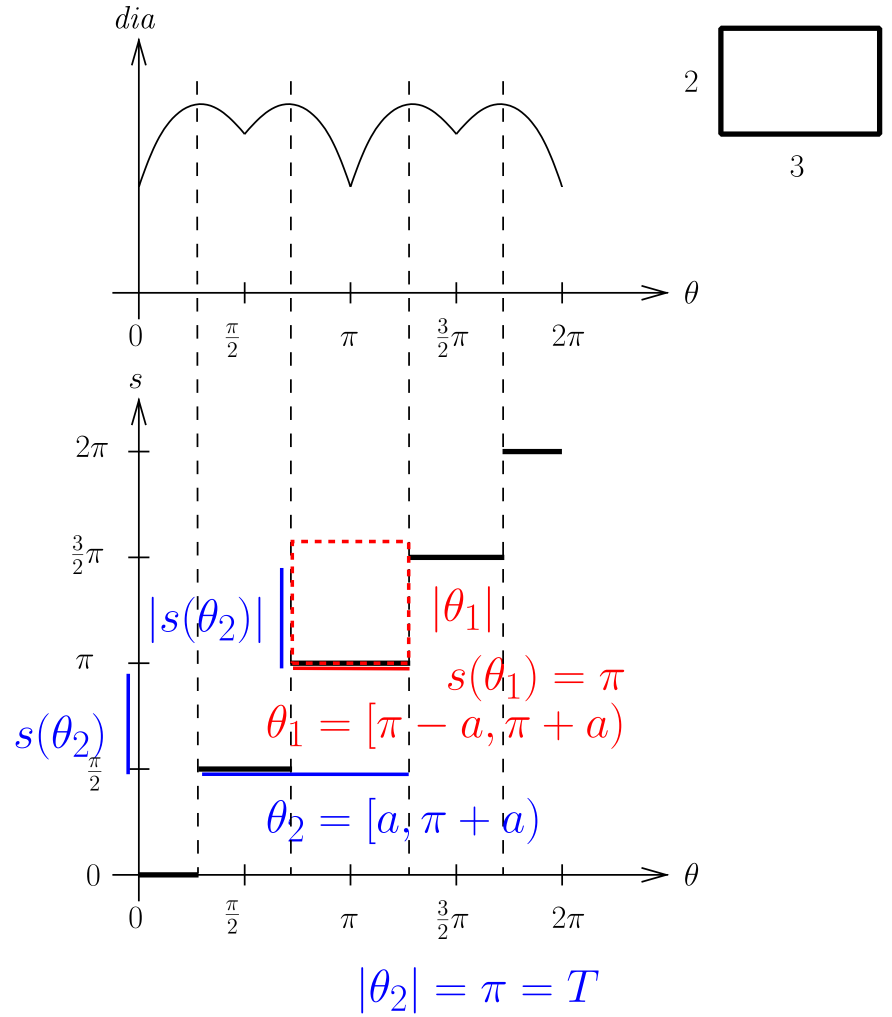
$\Rightarrow$ Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2)$, $|\Theta_2| = T$.



Beispiel Alg.!

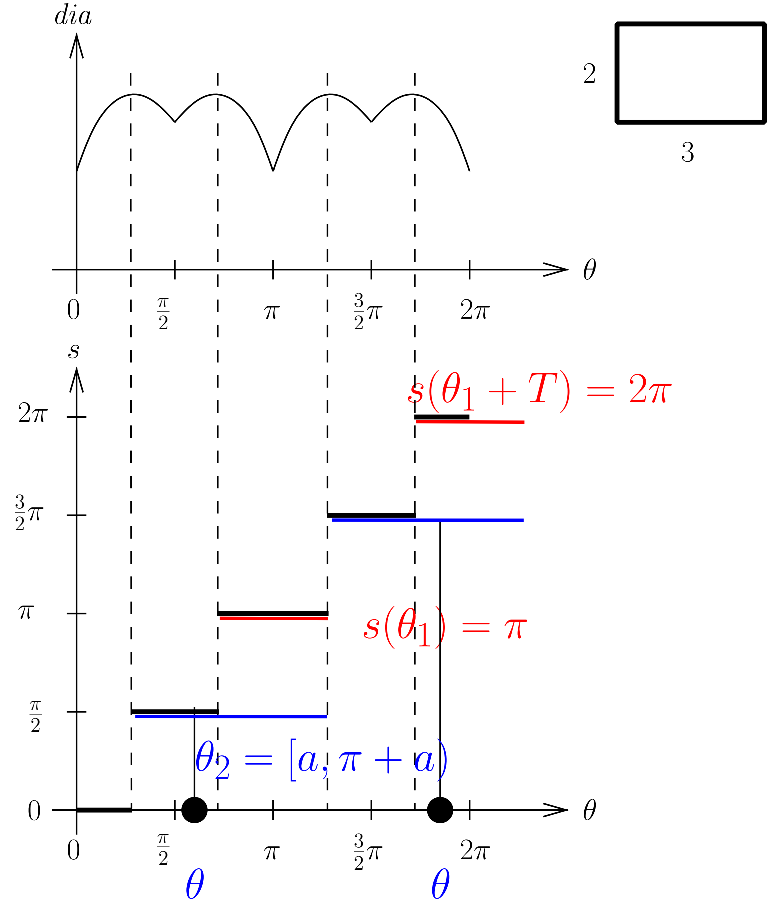
- $a := \arctan(3/2)$
- $L = ([\pi - a, \pi + a], [a, \pi + a])$

  mit $|\Theta_2| = T$, $i = 2$.
  $L = ([\xi_1, \nu_1], [\xi_2, \nu_2])$.
- Plan $\mathcal{A} = (\alpha_i, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_1)$:
  - $\alpha_i = \alpha_2 = 0$!
  - Für $j = i-1, i-2, \ldots, 1$:
    $\alpha_j := s(\xi_{j+1}) - \xi_j - \varepsilon_j + \alpha_{j+1}$.
    $\varepsilon_j = \frac{1}{2}\left(|\Theta_j| - |s(\Theta_{j+1})|\right)$
    Fehlertoleranz!
  - $\alpha_2 := 0$, $\alpha_1 := \pi/2 - (\pi - a) + 0 - 1/2(2a - \pi/2) = -\pi/4$



Bis auf Symmetrie!

- Plan: $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -\pi/4$
- $a := \arctan(3/2)$
- $\theta \in [a, \pi + a]$ nach π
- $\theta \in [\pi + a, a]$ nach $2\pi = 0$



Ergebnis: Theorem 4.5!

Gegeben sei eine Liste von n Kanten, die die konvexe Hülle eines gegebenen Werkstücks repräsentieren. Dann läßt sich in Zeit $O(n^2 \log n)$ die kürzeste Sequenz von Greifaktionen finden, die eine Orientierung des Werkstücks bis auf Symmetrie garantiert. Der gefundene Plan hat eine Länge von $O(n^2)$.

Beweis!

Theorem 4.5! Korrektheit!!

1. Orientiert Werkstück eindeutig bis auf Symmetrie:

   Der Algorithmus findet einen Plan, der ein s-Intervall Θ der Länge T (kleinste Periode) auf einen Punkt θ' abbildet!

   $\Theta + T$ wird auf $\theta' + T$ abgebildet!

2. Es gibt keinen kürzeren Plan mit dieser Eigenschaft

Zu 1) Wie gesehen, sukzessive:

- $s(\Theta_i) = [s(\xi_i), s(\nu_i)]$, $\Theta_{i-1} = [\xi_{i-1}, \nu_{i-1}]$, $|s(\Theta_i)| < |\Theta_{i-1}|$
- $\xi_{i-1} \leq s(\theta) - s(\xi_i) + \xi_{i-1} \leq \nu_{i-1}$

- $s(\theta) - (s(\xi_i) - \xi_{i-1})$, bereits: $s(\theta)$ durch α_i
- $+\alpha_i$ wegen bereits durchgeführter Drehungen
- Immer von der Startrichtung aus drehen!!
- $s(s(\theta) - (s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \alpha_i)) \in s(\Theta_{i-1})$
- Mit Dreh. $s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \alpha_i$ nach $s(\Theta_{i-1})$
- $\alpha_{i-1} := s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \alpha_i$
- $\varepsilon_{i-1} = \frac{1}{2}\left(|\Theta_j| - |s(\Theta_{j+1})|\right)$
- $\alpha_{i-1} := s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \varepsilon_{i-1} + \alpha_i$

Theorem 4.5! Bis auf Symmetrie (1)!

- Sei Θ letztes Intervall des Alg.
- Θ muss die Länge T haben (falls terminiert!)
- Algorithmus findet Plan, der s–Intervall Θ der Länge T auf einen Punkt θ' abbildet
- T ist kleinste Periode der Greiffunktion des Werkstücks
- Für jeden Plan $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(\theta + T) = \mathcal{A}(\theta) + T$ (Lemma 4.3!)
- Dann gilt: $\mathcal{A}(\theta + T) = \theta' + T$