

# Offline Bewegungsplanung: Reine Translation

Elmar Langetepe  
University of Bonn

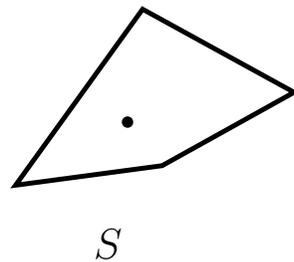
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen

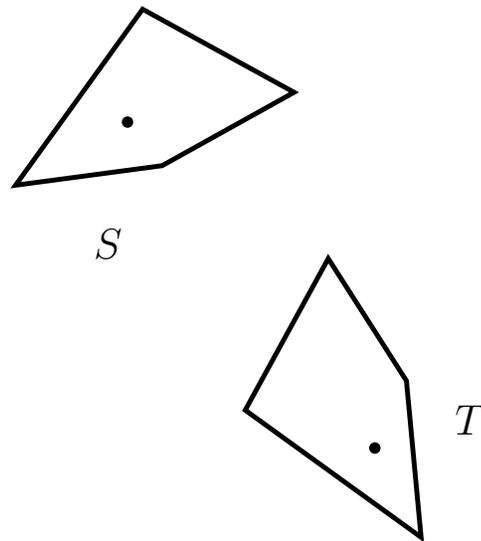
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen



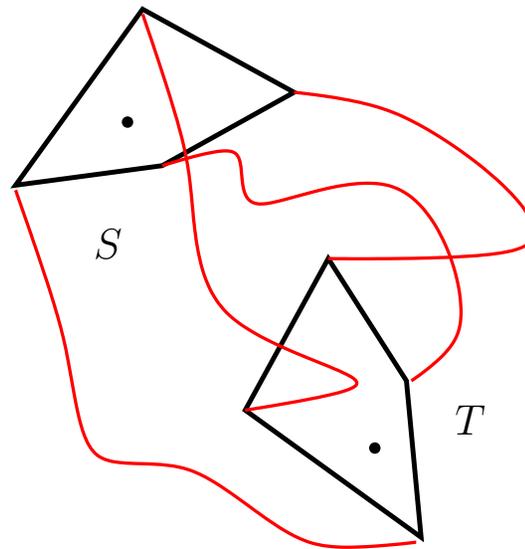
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen



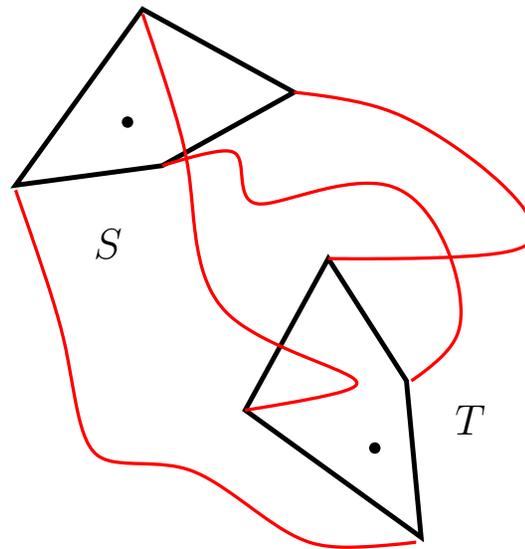
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt



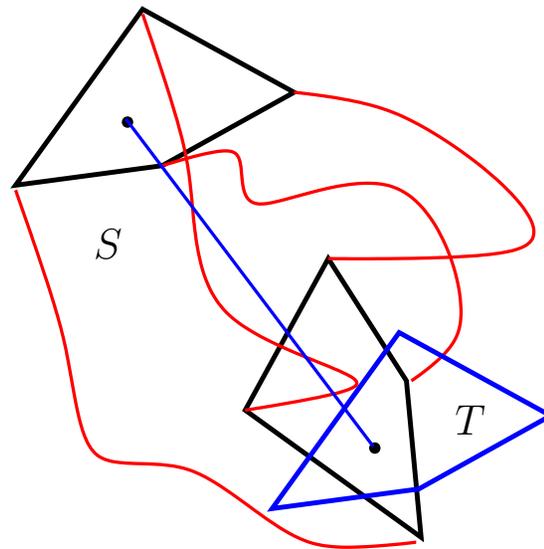
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt



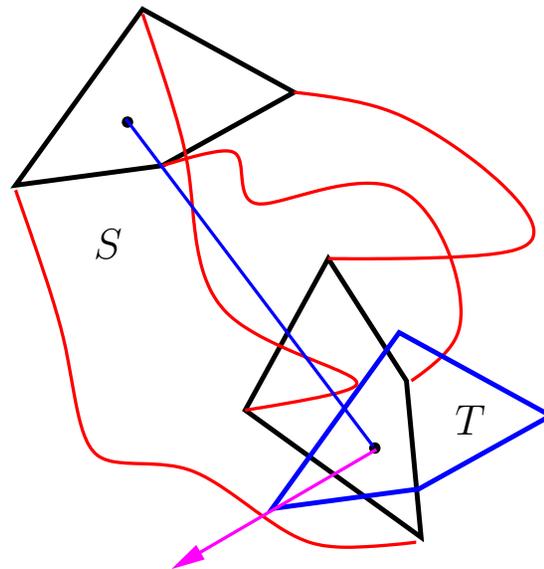
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt



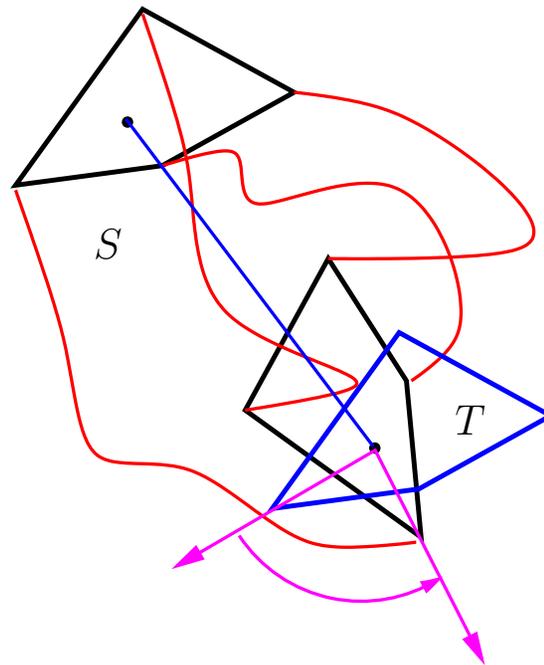
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt



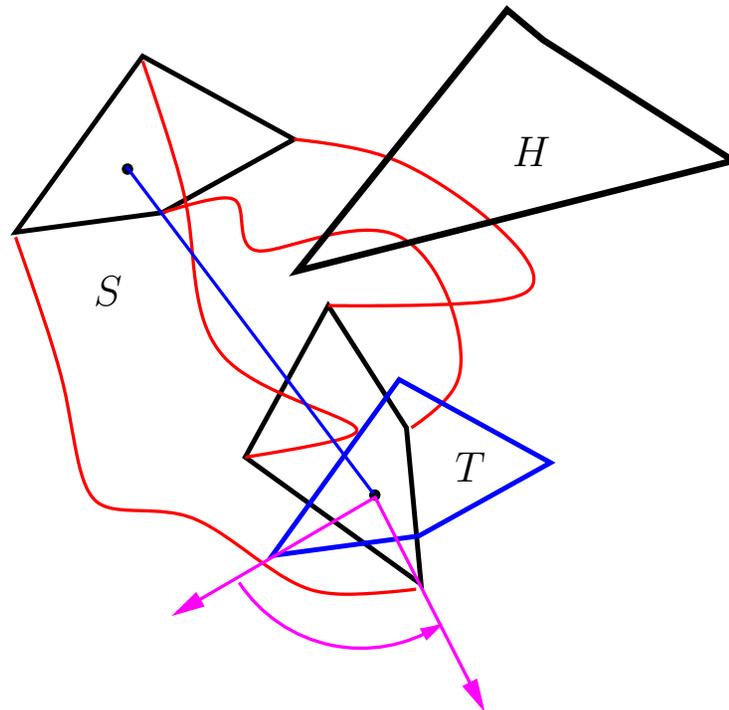
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt



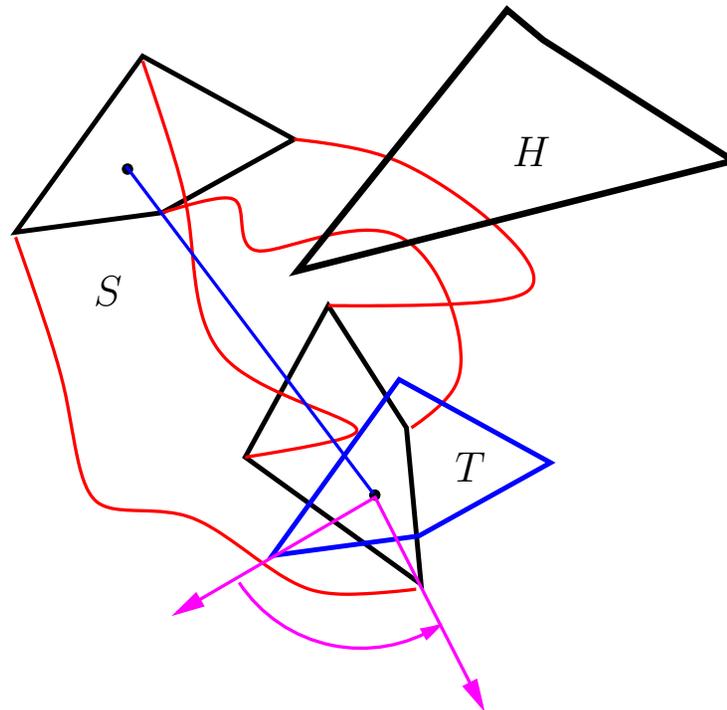
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt



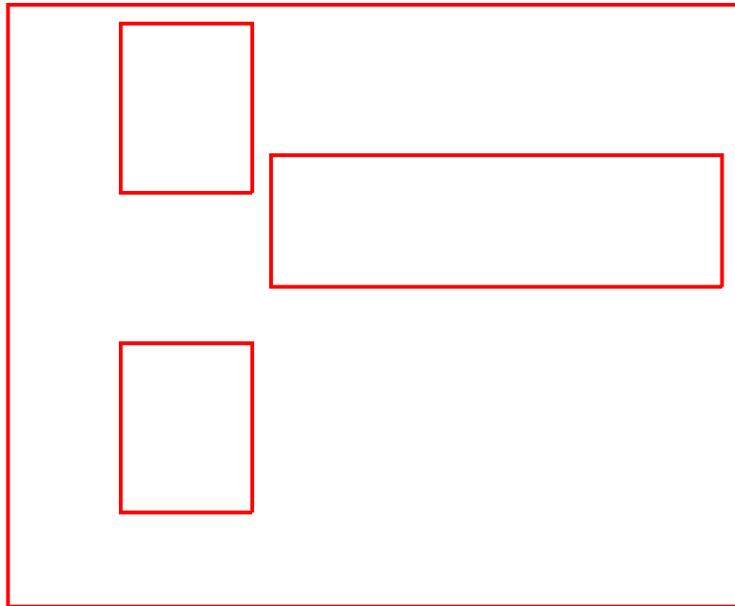
# Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt
- Kollisionsfrei??

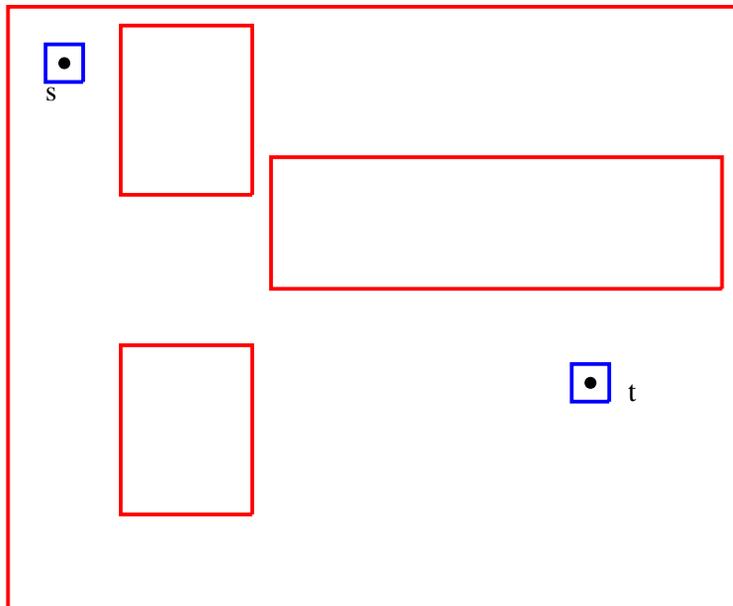


# Kollisionsfreie Bahnen: Startbeispiel!!

# Kollisionsfreie Bahnen: Startbeispiel!!



# Kollisionsfreie Bahnen: Startbeispiel!!

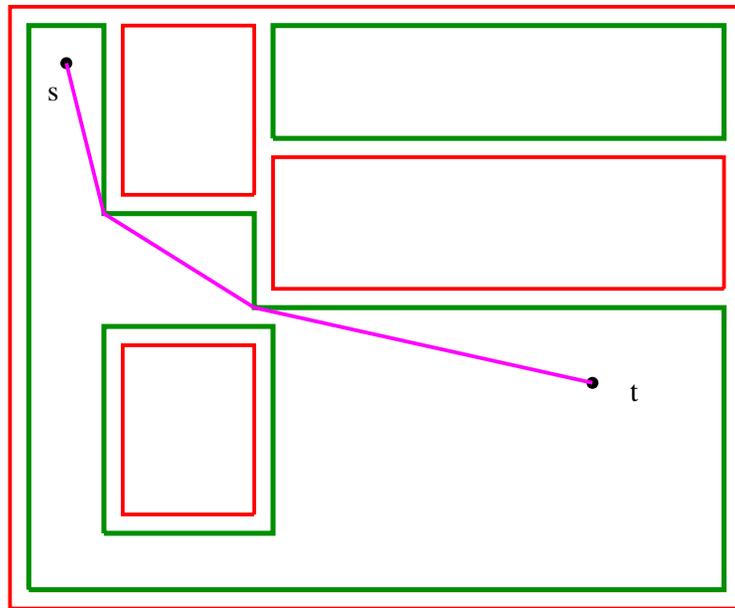


Translation: Verschieben Referenzpunkt  
Aufblasen der Hindernisse





# Kollisionsfreie Bahnen: Startbeispiel!!



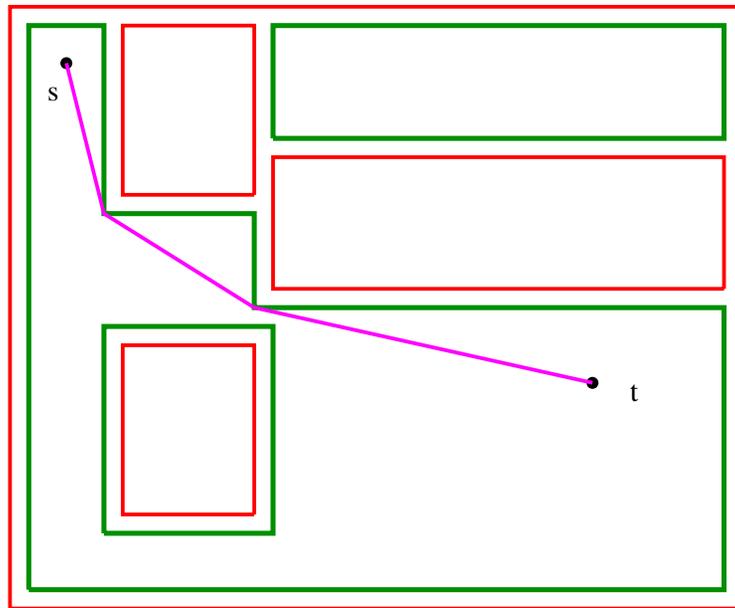
Translation: Verschieben Referenzpunkt

Aufblasen der Hindernisse

Vereinigung Sweep

Kürzester Weg????

# Kollisionsfreie Bahnen: Startbeispiel!!



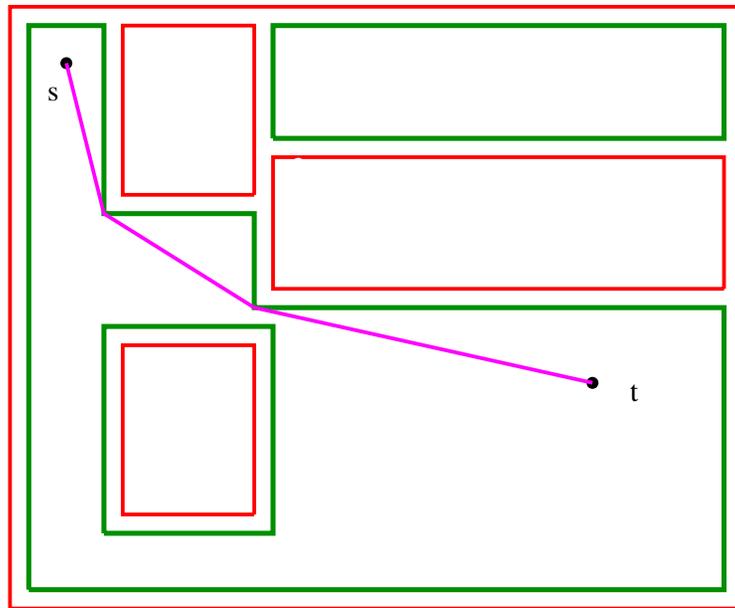
Translation: Verschieben Referenzpunkt

Aufblasen der Hindernisse

Vereinigung Sweep

Kürzester Weg????

# Kollisionsfreie Bahnen: Startbeispiel!!



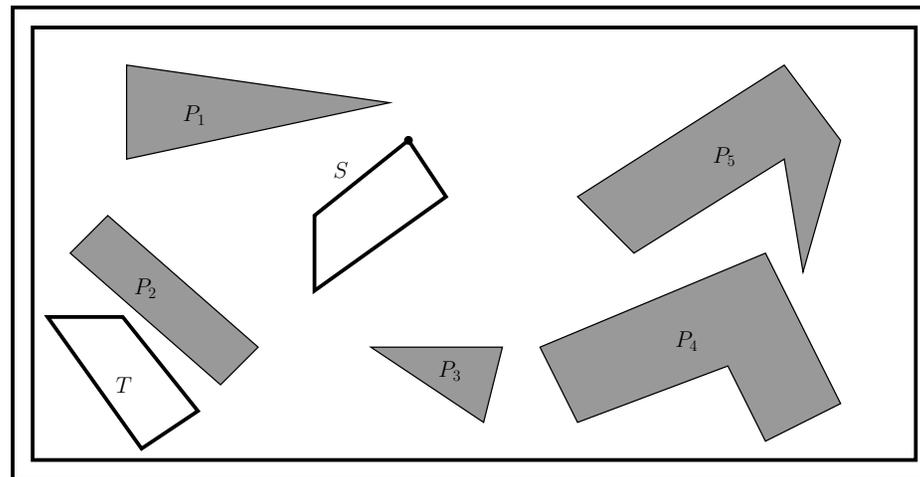
Translation: Verschieben Referenzpunkt

Aufblasen der Hindernisse

Vereinigung Sweep

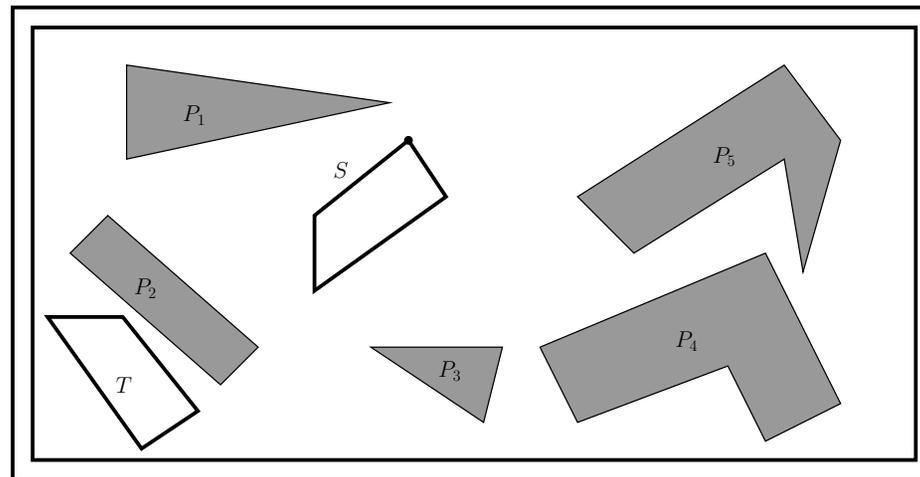
Kürzester Weg????

# Kollisionsfreie Bahnen: Allgemeiner!!



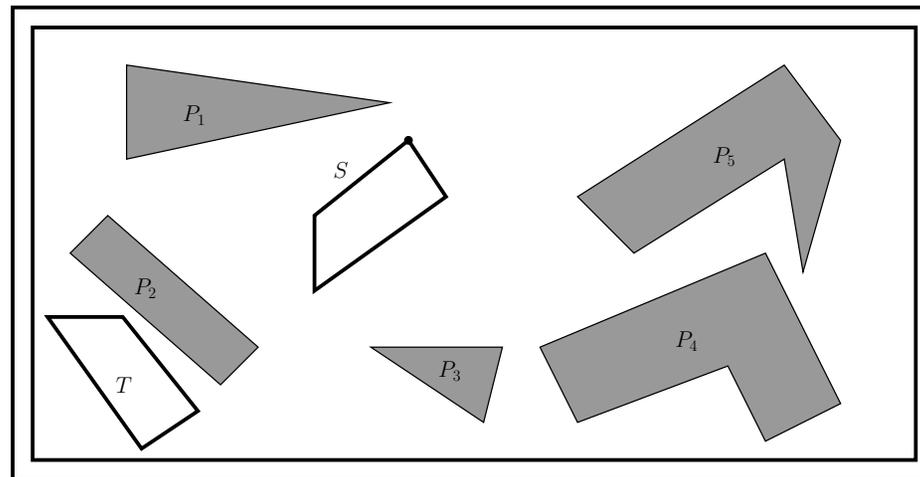
# Kollisionsfreie Bahnen: Allgemeiner!!

- Existiert Weg von  $S$  nach  $T$



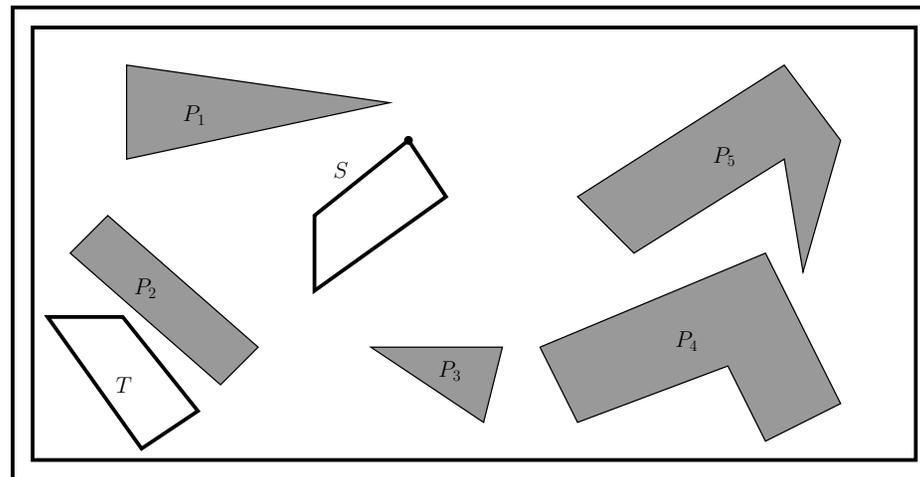
# Kollisionsfreie Bahnen: Allgemeiner!!

- Existiert Weg von  $S$  nach  $T$
- Berechne Weg von  $S$  nach  $T$



# Kollisionsfreie Bahnen: Allgemeiner!!

- Existiert Weg von  $S$  nach  $T$
- Berechne Weg von  $S$  nach  $T$
- Kürzester Weg

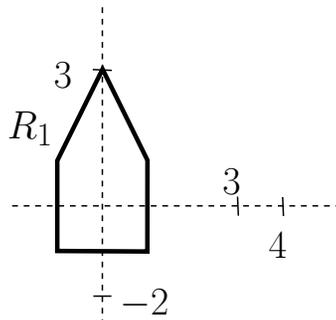


# Formal: Rotation und Translation

# Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

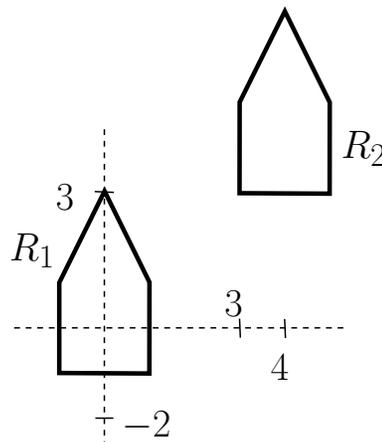


# Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

- Verschiebung  $R_2 = \{(5, 3), (5, 5), (4, 7), (3, 5), (3, 3)\}$



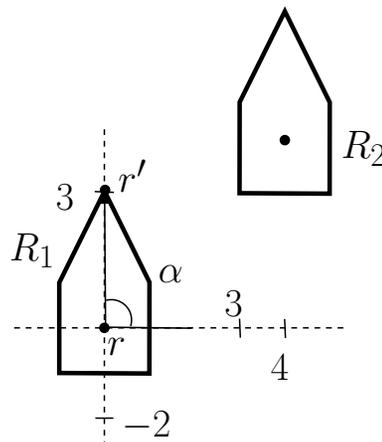
# Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

- Verschiebung  $R_2 = \{(5, 3), (5, 5), (4, 7), (3, 5), (3, 3)\}$

- Referenzpunkt  $r$



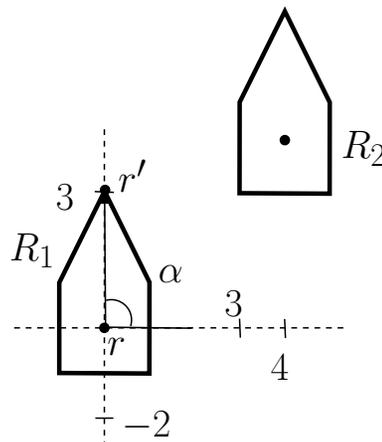
# Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

- Verschiebung  $R_2 = \{(5, 3), (5, 5), (4, 7), (3, 5), (3, 3)\}$

- Referenzpunkt  $r$  Winkelreferenzpunkt  $r'$



# Formal: Rotation und Translation

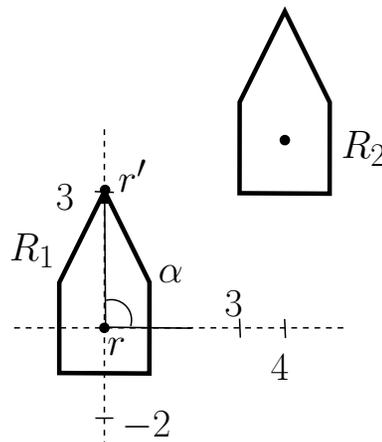
- Platzierung Endpunkte

$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

- Verschiebung  $R_2 = \{(5, 3), (5, 5), (4, 7), (3, 5), (3, 3)\}$

- Referenzpunkt  $r$  Winkelreferenzpunkt  $r'$

- $R_1 = R(0, 0, \pi/2) = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$



# Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

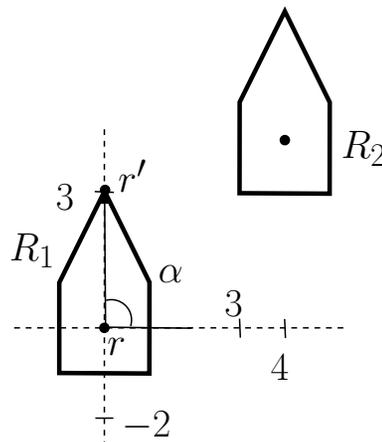
$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

- Verschiebung  $R_2 = \{(5, 3), (5, 5), (4, 7), (3, 5), (3, 3)\}$

- Referenzpunkt  $r$  Winkelreferenzpunkt  $r'$

- $R_1 = R(0, 0, \pi/2) = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$

- $R(x, y, \alpha)$ ,



# Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

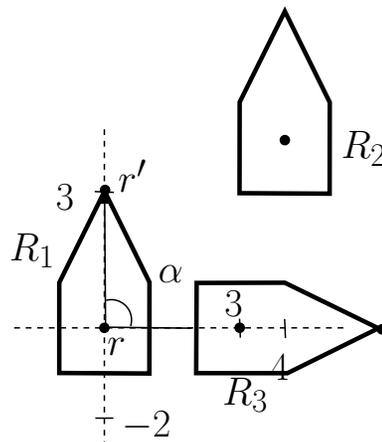
$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

- Verschiebung  $R_2 = \{(5, 3), (5, 5), (4, 7), (3, 5), (3, 3)\}$

- Referenzpunkt  $r$  Winkelreferenzpunkt  $r'$

- $R_1 = R(0, 0, \pi/2) = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$

- $R(x, y, \alpha)$ , Translation/Rotation:



# Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

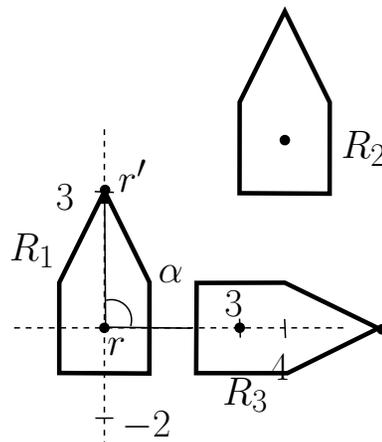
$$R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

- Verschiebung  $R_2 = \{(5, 3), (5, 5), (4, 7), (3, 5), (3, 3)\}$

- Referenzpunkt  $r$  Winkelreferenzpunkt  $r'$

- $R_1 = R(0, 0, \pi/2) = \{(1, -1), (1, 1), (0, 3), (-1, 1), (-1, -1)\}$

- $R(x, y, \alpha)$ , Translation/Rotation:  $R_3 = R(3, 0, 0)$



# Formale Definitionen: **Def. 2.1**

## Formale Definitionen: Def. 2.1

- Tripel  $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  Platzierung, 3 DOF (Freiheitsgrade) Referenzpunkt+Winkel!!!

## Formale Definitionen: Def. 2.1

- Tripel  $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  Platzierung, 3 DOF (Freiheitsgrade) Referenzpunkt+Winkel!!!
- Konfigurationsraum  $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$

## Formale Definitionen: Def. 2.1

- Tripel  $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  Platzierung, 3 DOF (Freiheitsgrade) Referenzpunkt+Winkel!!!
- Konfigurationsraum  $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$
- Arbeitsraum:  $R(x, y, \alpha), P_1, P_2, \dots, P_k$

## Formale Definitionen: Def. 2.1

- Tripel  $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  Platzierung, 3 DOF (Freiheitsgrade) Referenzpunkt+Winkel!!!
- Konfigurationsraum  $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$
- Arbeitsraum:  $R(x, y, \alpha), P_1, P_2, \dots, P_k$
- Verbotene Platzierungen  $C_{\text{verb}} := \left\{ c \in C \mid R(c) \cap \bigcup \mathring{P}_i \neq \emptyset \right\}$

## Formale Definitionen: Def. 2.1

- Tripel  $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  Platzierung, 3 DOF (Freiheitsgrade) Referenzpunkt+Winkel!!!
- Konfigurationsraum  $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$
- Arbeitsraum:  $R(x, y, \alpha), P_1, P_2, \dots, P_k$
- Verbotene Platzierungen  $C_{\text{verb}} := \left\{ c \in C \mid R(c) \cap \bigcup \mathring{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Freie Platzierungen  $C_{\text{frei}} := C \setminus C_{\text{verb}}$

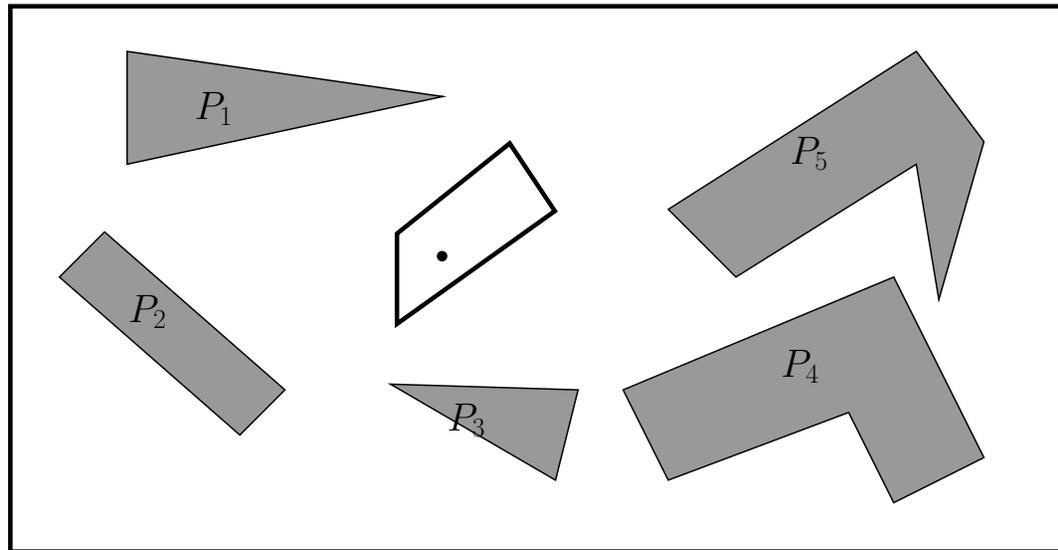
## Formale Definitionen: Def. 2.1

- Tripel  $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  Platzierung, 3 DOF (Freiheitsgrade) Referenzpunkt+Winkel!!!
- Konfigurationsraum  $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$
- Arbeitsraum:  $R(x, y, \alpha), P_1, P_2, \dots, P_k$
- Verbotene Platzierungen  $C_{\text{verb}} := \left\{ c \in C \mid R(c) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Freie Platzierungen  $C_{\text{frei}} := C \setminus C_{\text{verb}}$
- Halbfreie Platzierungen

# Beispiel!!

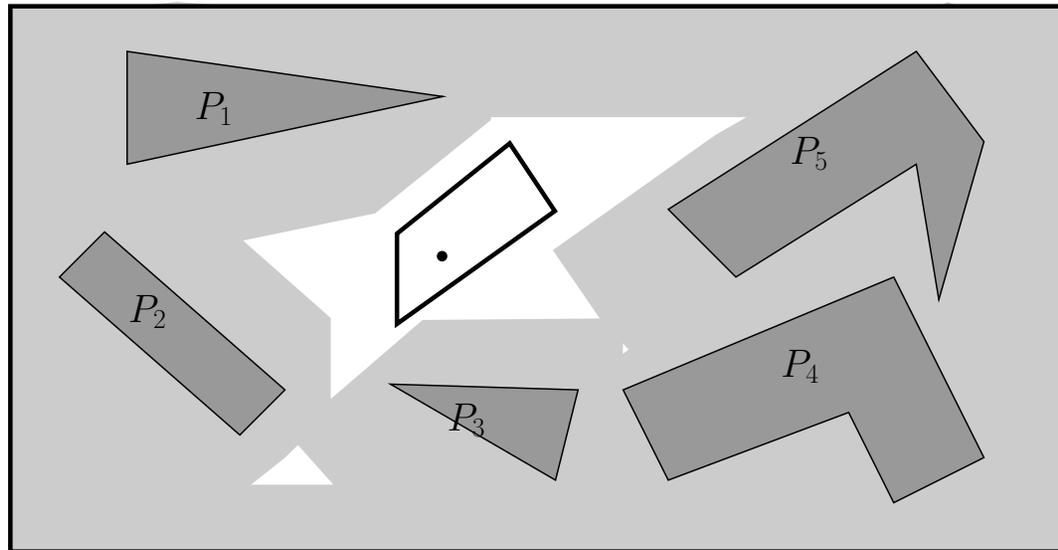
- Reine Translation
- Bereich der gültigen Platzierungen

# Beispiel!!



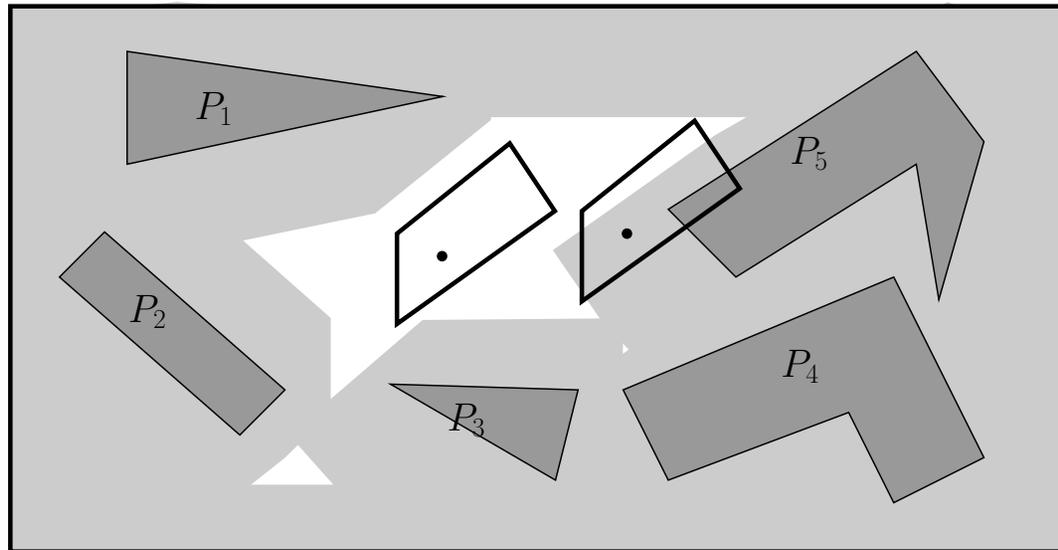
- Reine Translation
- Bereich der gültigen Platzierungen

# Beispiel!!



- Reine Translation
- Bereich der gültigen Platzierungen

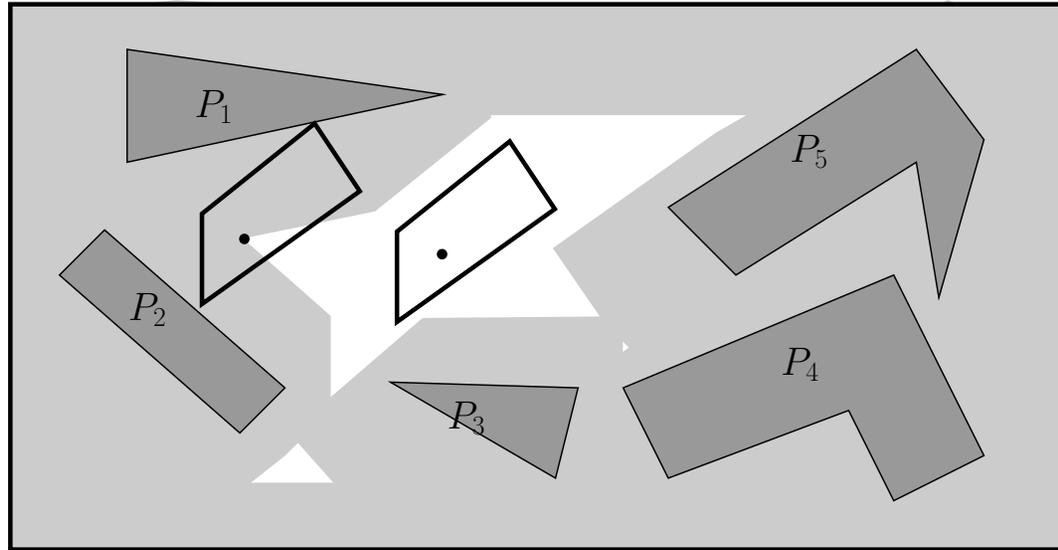
# Beispiel!!



- Reine Translation
- Bereich der gültigen Platzierungen



# Beispiel!!



- Reine Translation
- Bereich der gültigen Platzierungen

# Weg-zusammenhängend **Def. 2.2**

## Weg-zusammenhängend Def. 2.2

- Menge  $Z$  ( $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ )

## Weg-zusammenhängend **Def. 2.2**

- Menge  $Z$  ( $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ )
- Pfad  $\pi$  von  $a$  nach  $b$ :

## Weg-zusammenhängend **Def. 2.2**

- Menge  $Z$  ( $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ )
- Pfad  $\pi$  von  $a$  nach  $b$ :
  - Stetige Abbildung  $\pi : [0, 1] \rightarrow Z$

## Weg-zusammenhängend **Def. 2.2**

- Menge  $Z$  ( $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ )
- Pfad  $\pi$  von  $a$  nach  $b$ :
  - Stetige Abbildung  $\pi : [0, 1] \rightarrow Z$
  - $\pi(0) = a, \pi(1) = b$

## Weg-zusammenhängend **Def. 2.2**

- Menge  $Z$  ( $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ )
- Pfad  $\pi$  von  $a$  nach  $b$ :
  - Stetige Abbildung  $\pi : [0, 1] \rightarrow Z$
  - $\pi(0) = a, \pi(1) = b$
- weg-zusammenhängend:

## Weg-zusammenhängend **Def. 2.2**

- Menge  $Z$  ( $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ )
- Pfad  $\pi$  von  $a$  nach  $b$ :
  - Stetige Abbildung  $\pi : [0, 1] \rightarrow Z$
  - $\pi(0) = a, \pi(1) = b$
- weg-zusammenhängend:
  - $\forall a, b \in Z : \exists$  Pfad  $\pi$  von  $a$  nach  $b$  in  $Z$ .

# Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

# Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):

## Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$

## Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:

# Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:
  - Reflexiv:  $a \sim a$

## Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:
  - Reflexiv:  $a \sim a$
  - Symmetrisch:  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

# Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:
  - Reflexiv:  $a \sim a$
  - Symmetrisch:  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
  - Transitiv:  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

# Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:
  - Reflexiv:  $a \sim a$
  - Symmetrisch:  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
  - Transitiv:  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
- Äquivalenzklassen (Zusammenhangskomponenten)
  - größte weg-zusammenhängende Teilmengen

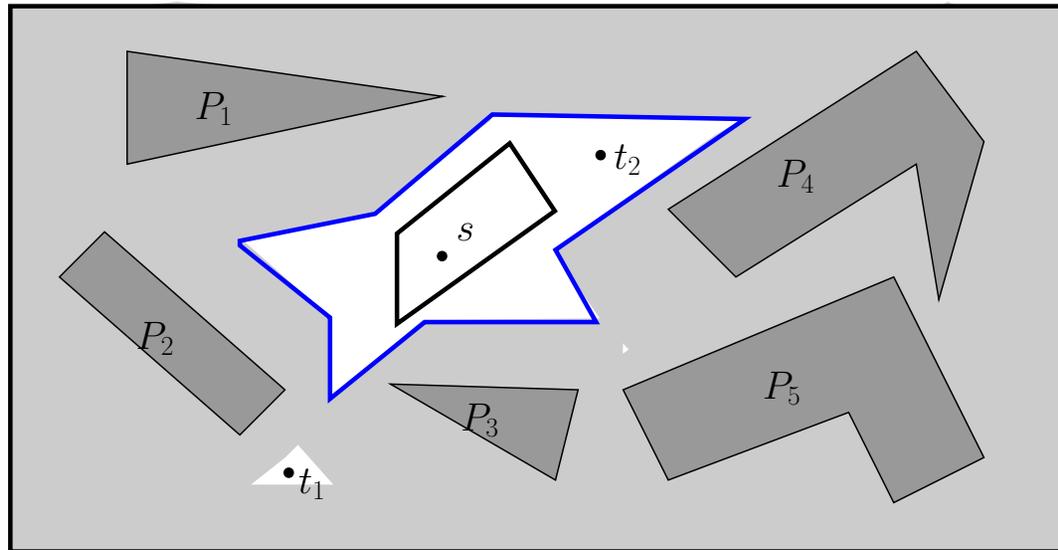
# Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:
  - Reflexiv:  $a \sim a$
  - Symmetrisch:  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
  - Transitiv:  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
- Äquivalenzklassen (Zusammenhangskomponenten)
  - größte weg-zusammenhängende Teilmengen
  - überdecken  $A$  disjunkt:

# Zusammenhangskomponenten **Lemma 2.3**

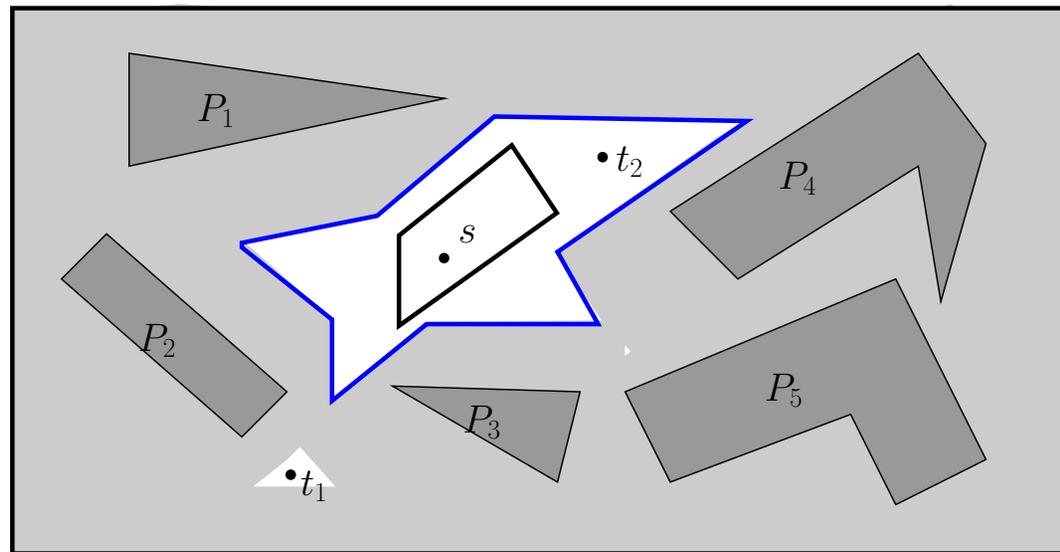
- Relation auf  $A \times A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ):  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$  Pfad  $\pi \subset A$  von  $a$  nach  $b$  in  $A$  mit  $\pi(0) = a$  und  $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:
  - Reflexiv:  $a \sim a$
  - Symmetrisch:  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
  - Transitiv:  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
- Äquivalenzklassen (Zusammenhangskomponenten)
  - größte weg-zusammenhängende Teilmengen
  - überdecken  $A$  disjunkt:  $A = \dot{\bigcup} Z_i$

# Aufgabe: Beispiel Translation!



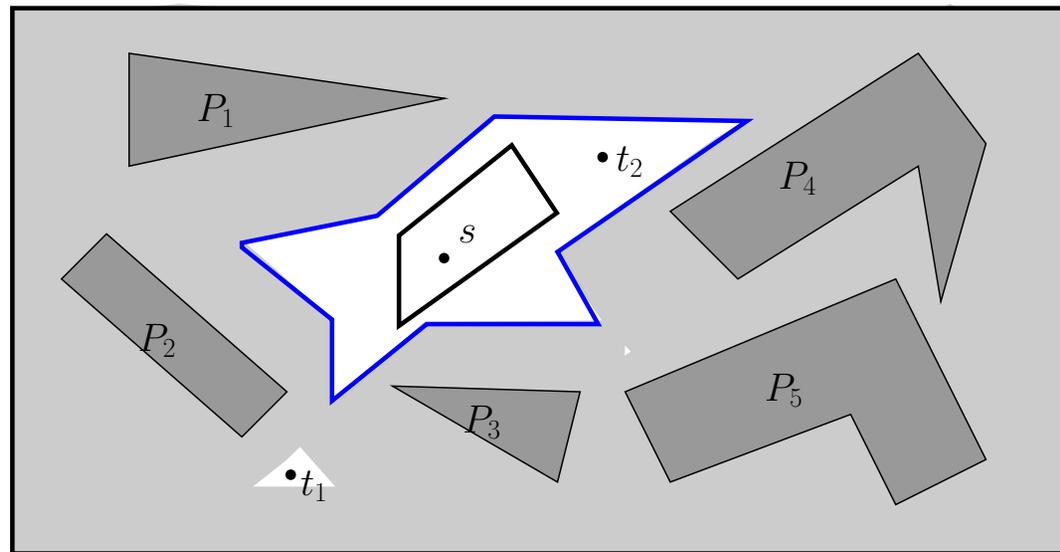
# Aufgabe: Beispiel Translation!

- Berechne Zusammenhangskomponente von  $Z_s$ ,  $s$  Startkoordinaten



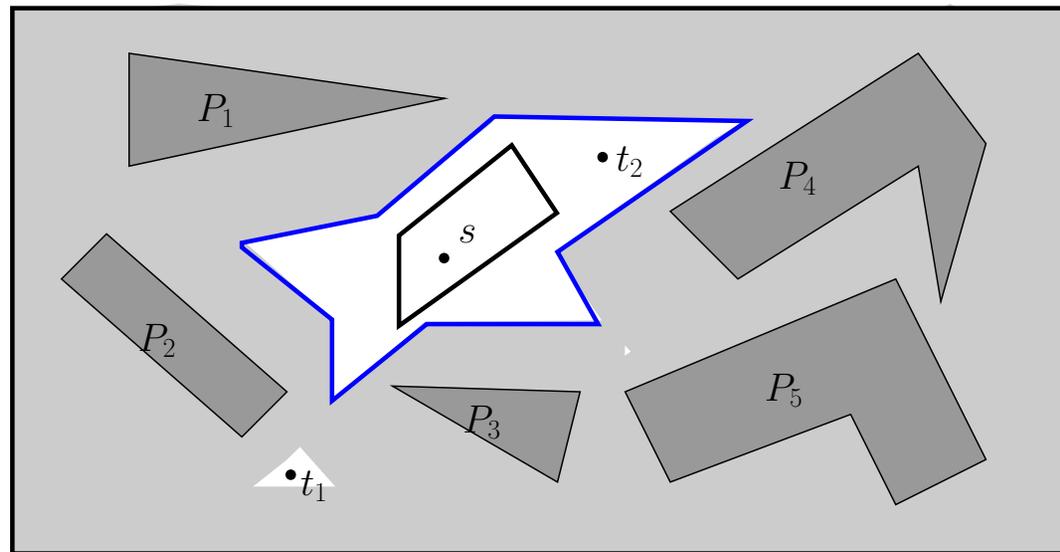
# Aufgabe: Beispiel Translation!

- Berechne Zusammenhangskomponente von  $Z_s$ ,  $s$  Startkoordinaten
- Liegt  $t$  auch in  $Z_s$ ?



# Aufgabe: Beispiel Translation!

- Berechne Zusammenhangskomponente von  $Z_s$ ,  $s$  Startkoordinaten
- Liegt  $t$  auch in  $Z_s$ ?
- Berechne ggf. Weg  $s$  nach  $t$  in  $Z_s$



# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter **2.1.2**

# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$

## Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

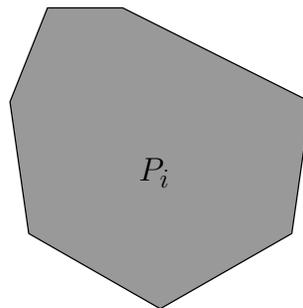
- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$

# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$

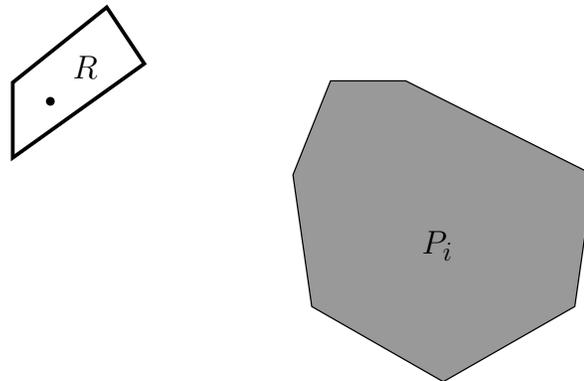
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



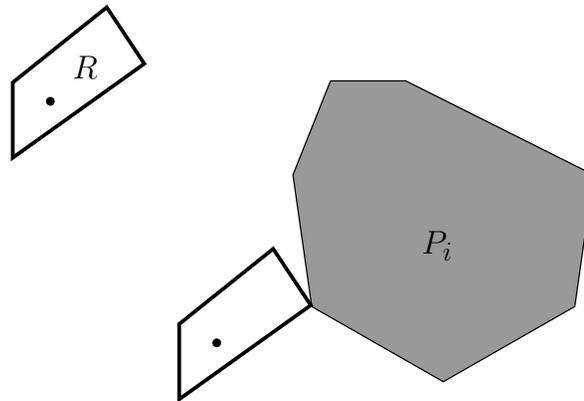
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



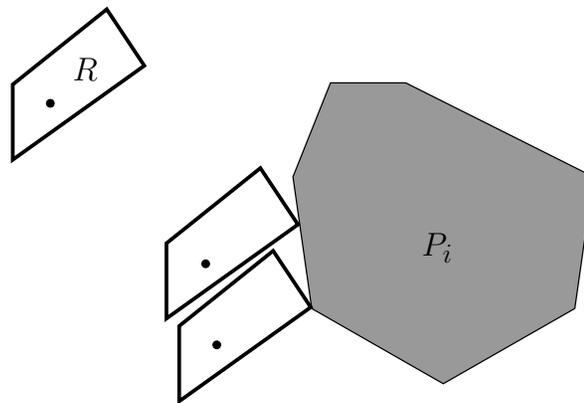
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



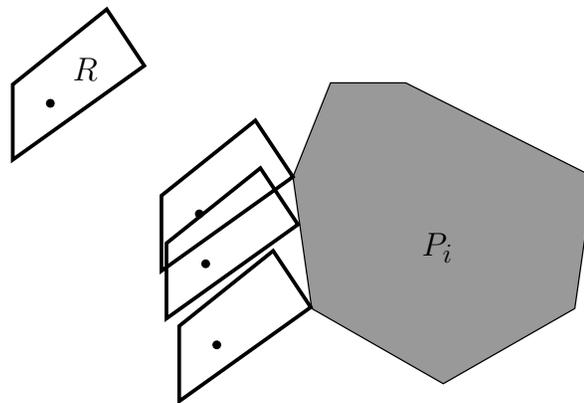
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



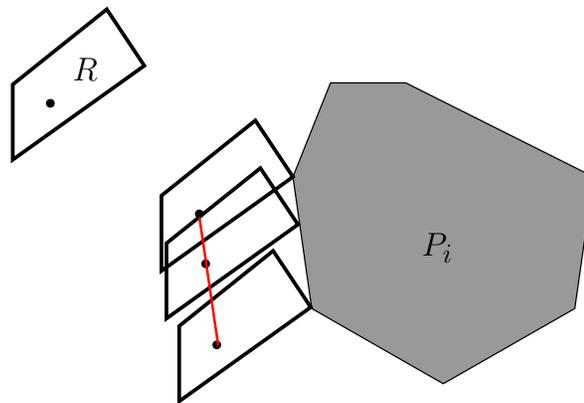
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



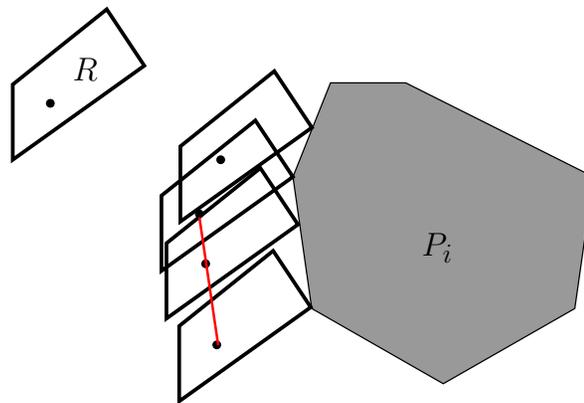
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



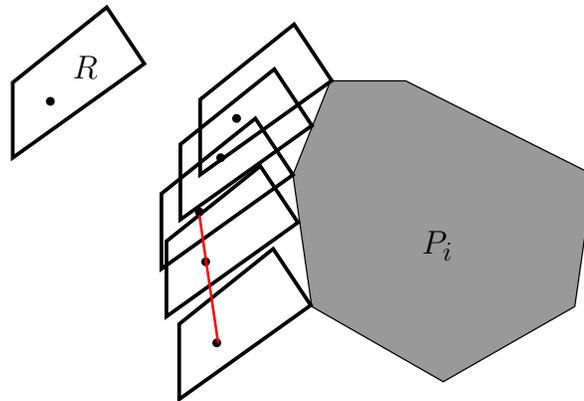
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



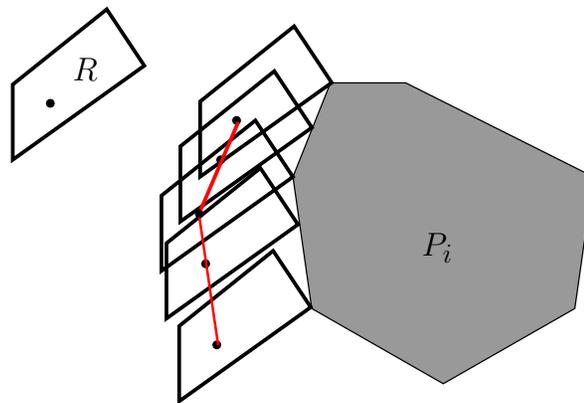
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



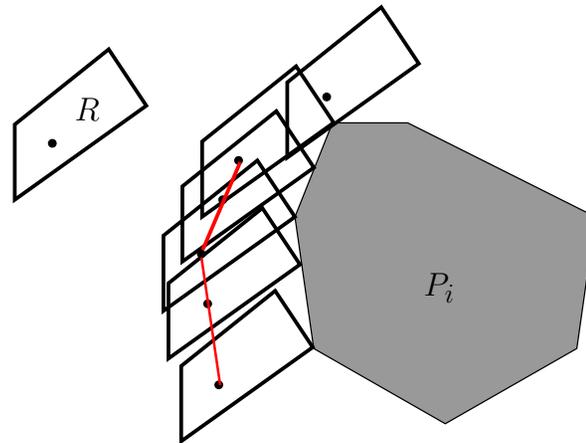
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



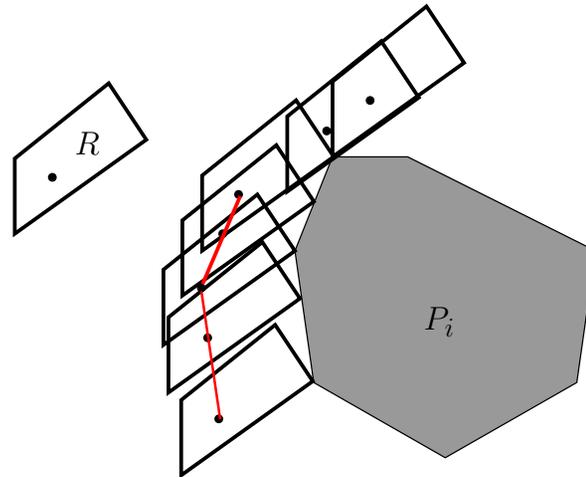
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



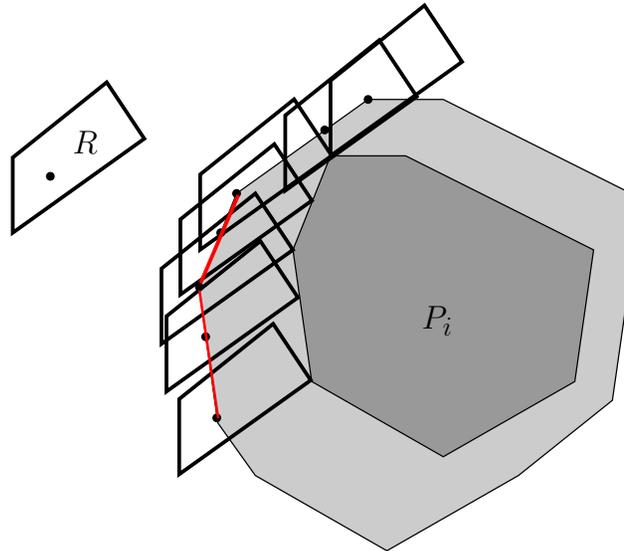
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$



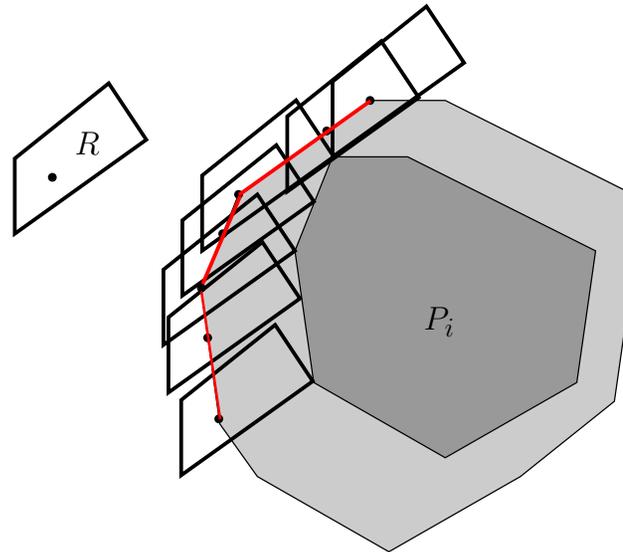
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



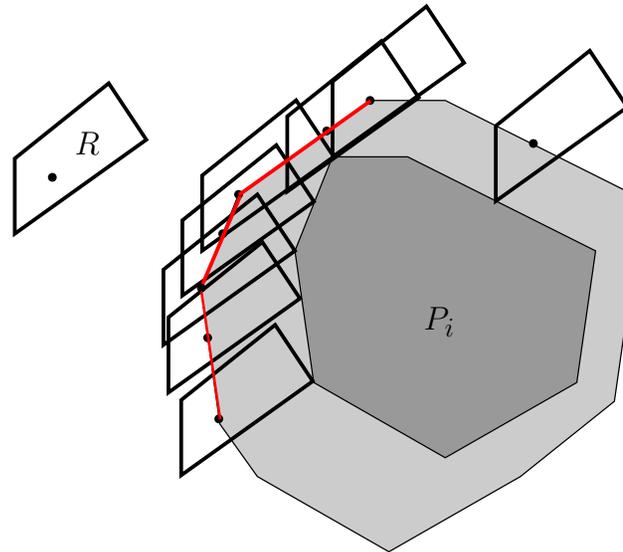
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



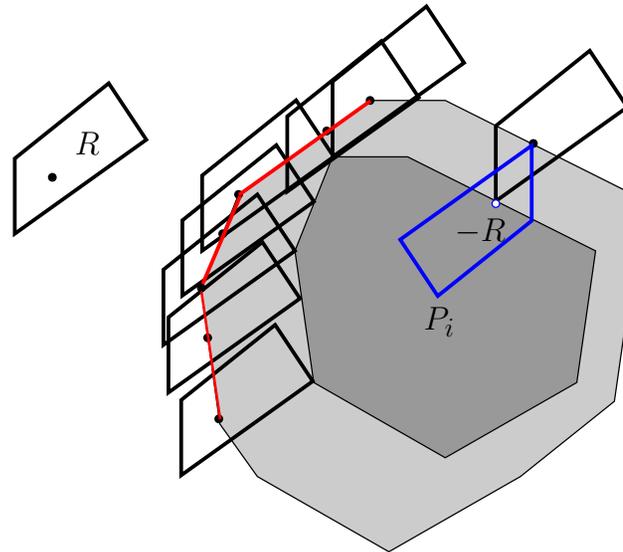
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



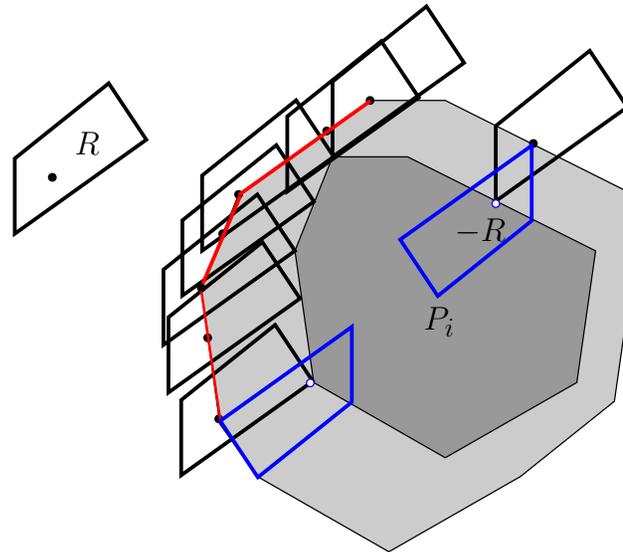
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



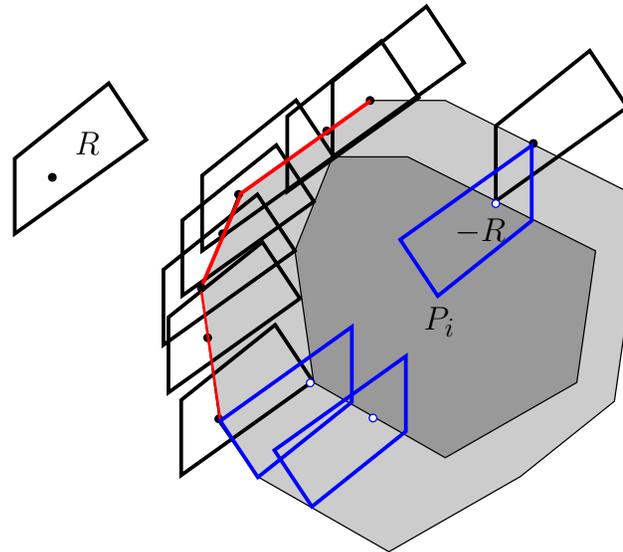
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



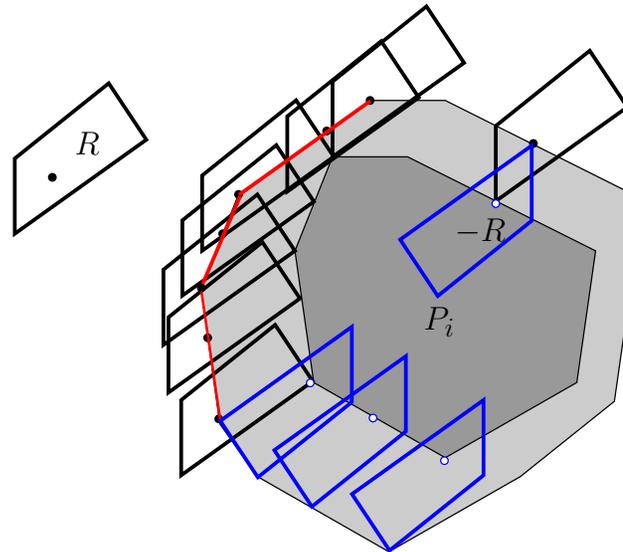
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



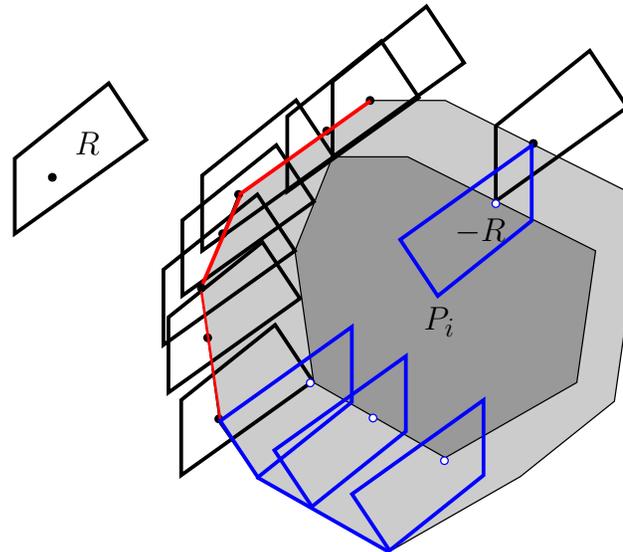
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



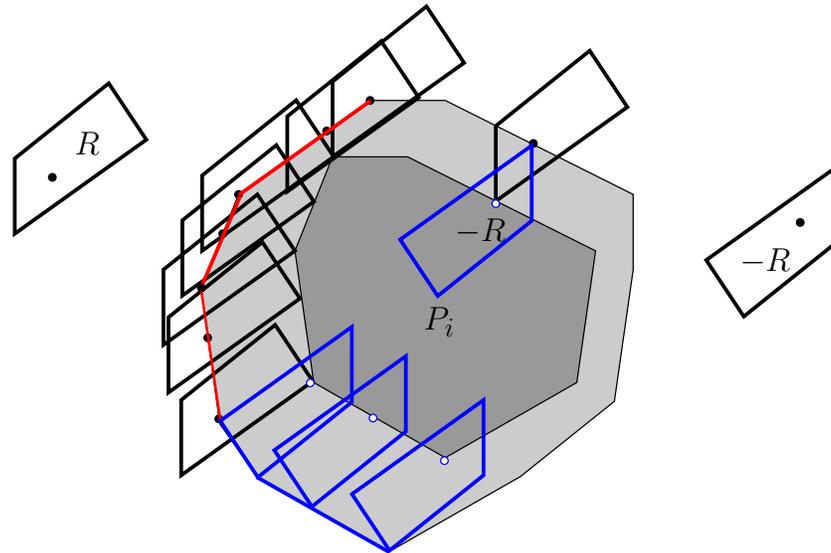
# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



# Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter  $R$ , Hindernisse  $P_1, P_2, \dots, P_k$
- Berechne  $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon  $P_i$
- Konfigurationsraumhindernis  
 $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



# Minkowski-Summe **Def. 2.4**

## Minkowski-Summe **Def. 2.4**

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ :  $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

## Minkowski-Summe **Def. 2.4**

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ :  $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .
- **Bem. 2.4:**

## Minkowski-Summe **Def. 2.4**

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ :  $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

- **Bem. 2.4:**

i) kommutativ:  $A \oplus B = B \oplus A$

## Minkowski-Summe **Def. 2.4**

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ :  $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

- **Bem. 2.4:**

i) kommutativ:  $A \oplus B = B \oplus A$

ii) assoziativ:  $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

## Minkowski-Summe **Def. 2.4**

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ :  $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

- **Bem. 2.4:**

**i)** kommutativ:  $A \oplus B = B \oplus A$

**ii)** assoziativ:  $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

**iii)** distributiv bzgl. der Vereinigung:

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

## Minkowski-Summe **Def. 2.4**

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ :  $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

- **Bem. 2.4:**

**i)** kommutativ:  $A \oplus B = B \oplus A$

**ii)** assoziativ:  $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

**iii)** distributiv bzgl. der Vereinigung:

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Anschaulich!!!

## Minkowski-Summe **Def. 2.4**

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ :  $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

- **Bem. 2.4:**

**i)** kommutativ:  $A \oplus B = B \oplus A$

**ii)** assoziativ:  $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

**iii)** distributiv bzgl. der Vereinigung:

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Anschaulich!!! [MinkSum.html](#)

# Lemma 2.6

## Lemma 2.6

$$CP_i := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \}$$

## Lemma 2.6

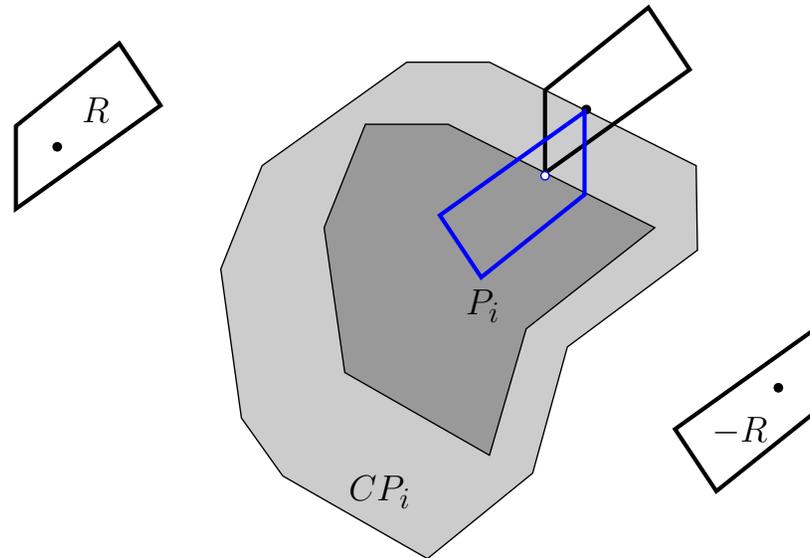
$$CP_i := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \}$$

$$CP_i = P_i \oplus (-R(0, 0))$$

## Lemma 2.6

$$CP_i := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \}$$

$$CP_i = P_i \oplus (-R(0, 0))$$



Beweis: Tafel!!!





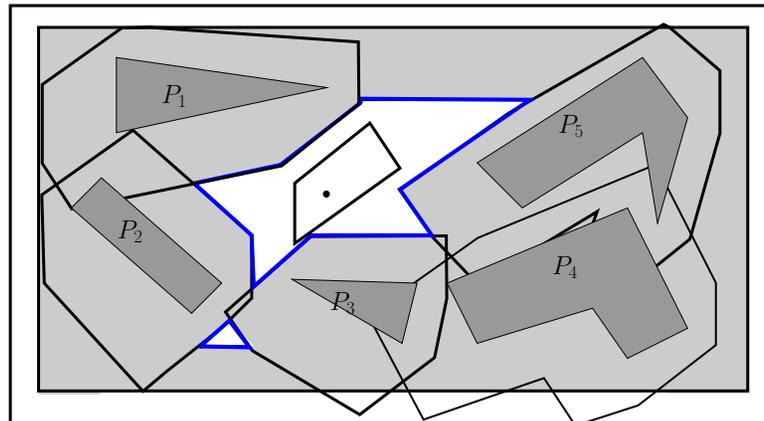






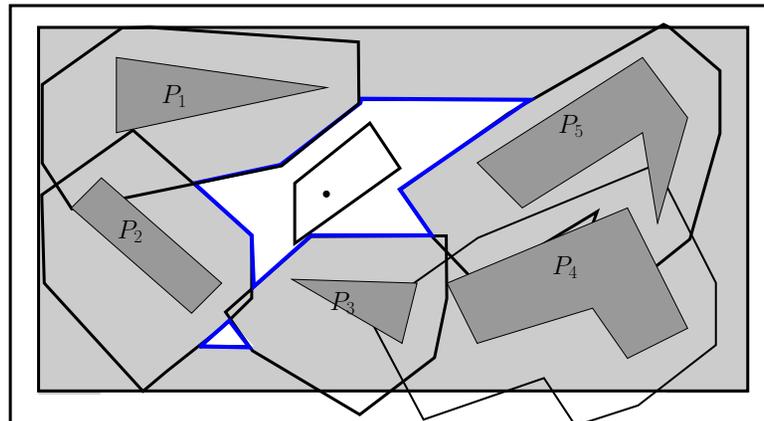
## Folgerung!

- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$
- $\partial \left( \bigcup_{i=1}^k CP_i \right)$
- $\partial \left( \bigcup_{i=1}^k (P_i \oplus (-R(0, 0))) \right)$
- Alle Summen  $P_i \oplus (-R(0, 0))$  bilden



# Folgerung!

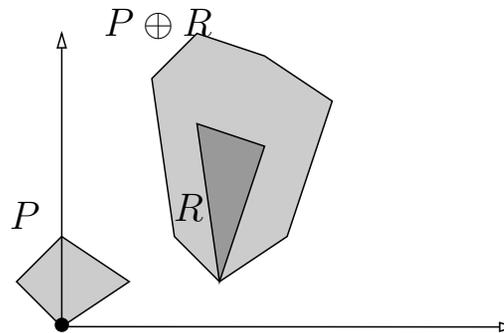
- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$
- $\partial \left( \bigcup_{i=1}^k CP_i \right)$
- $\partial \left( \bigcup_{i=1}^k (P_i \oplus (-R(0, 0))) \right)$
- Alle Summen  $P_i \oplus (-R(0, 0))$  bilden
- Vereinigen!



# Eigenschaften von Minkowski-Summen

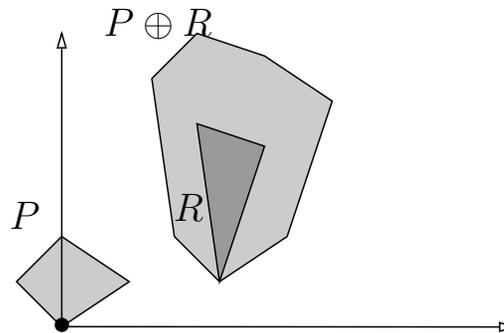
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone



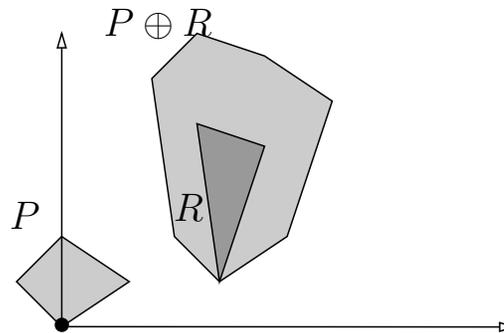
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !



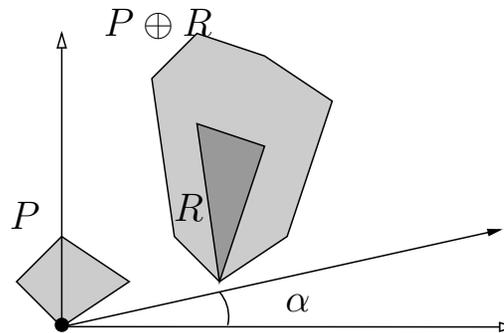
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



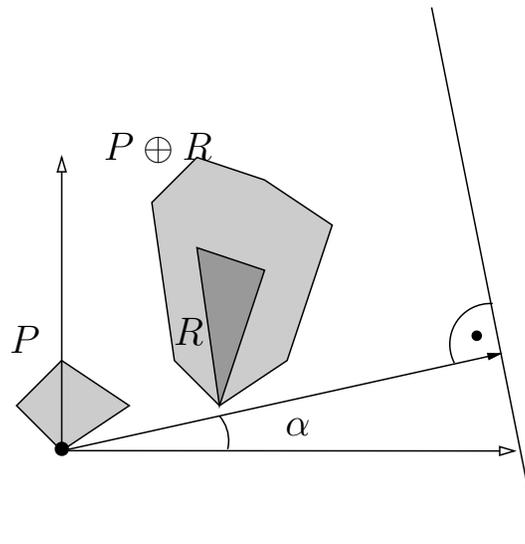
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



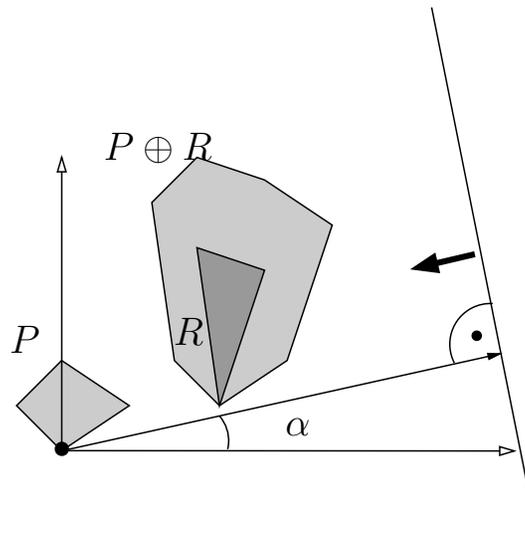
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



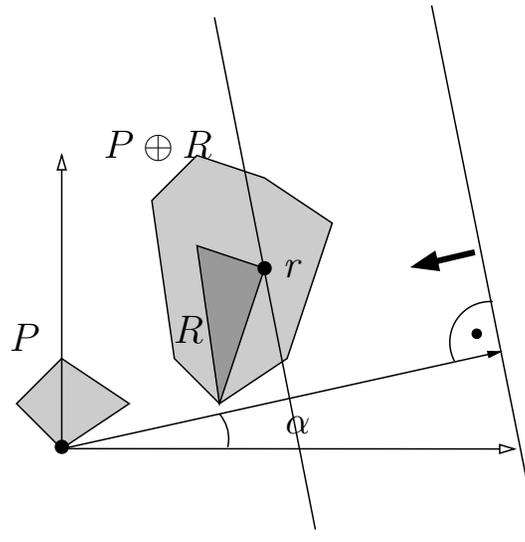
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



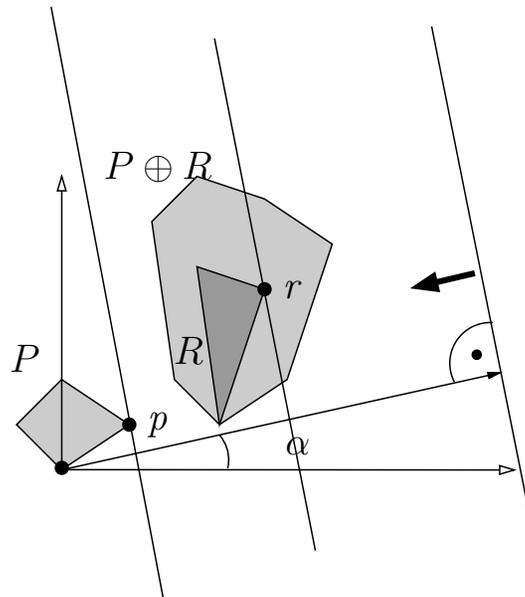
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



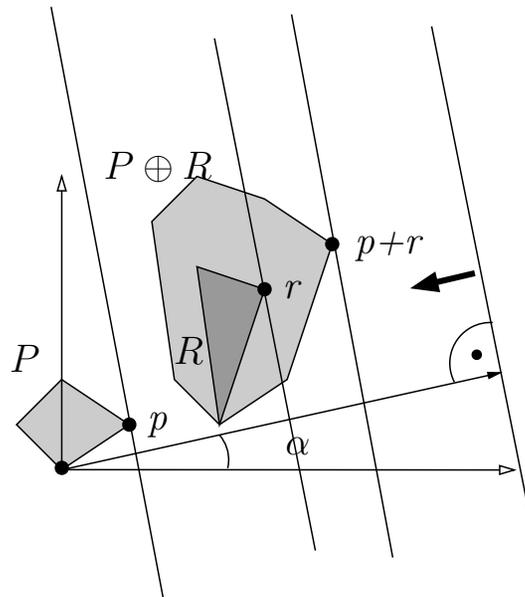
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



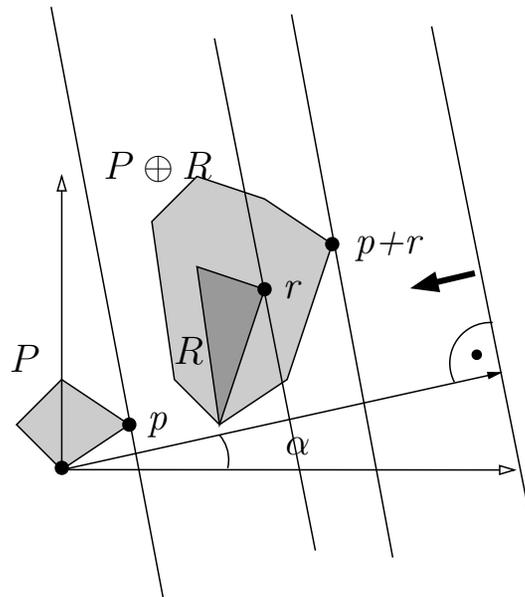
# Eigenschaften von Minkowski-Summen

- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



# Eigenschaften von Minkowski-Summen

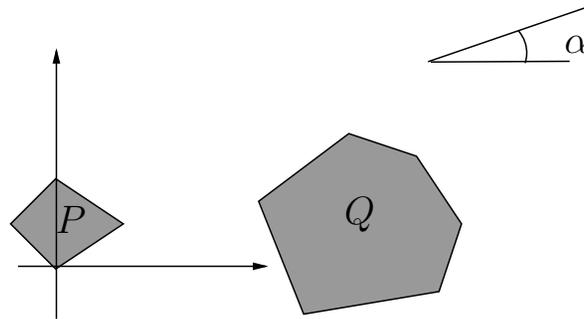
- $P, Q$  konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich  $\alpha$ !
- Extrempunkte von  $P \oplus Q$  aus Summe von Extrempunkten



# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

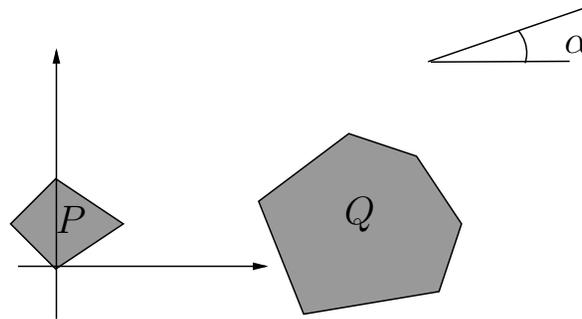
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$



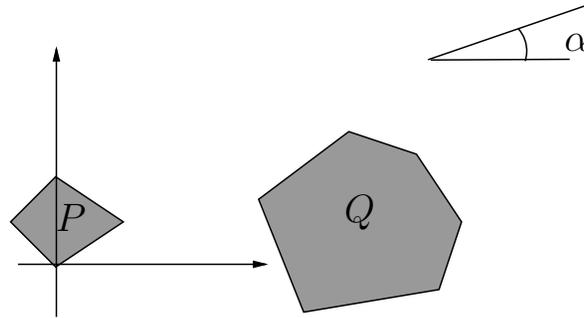
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel)



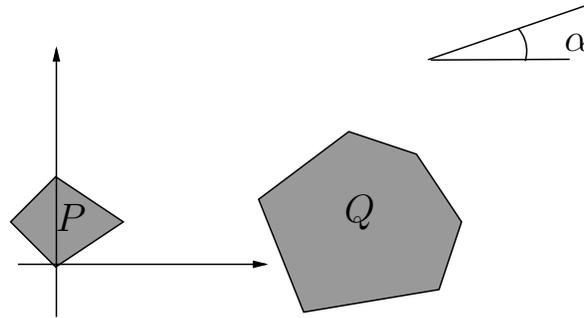
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten



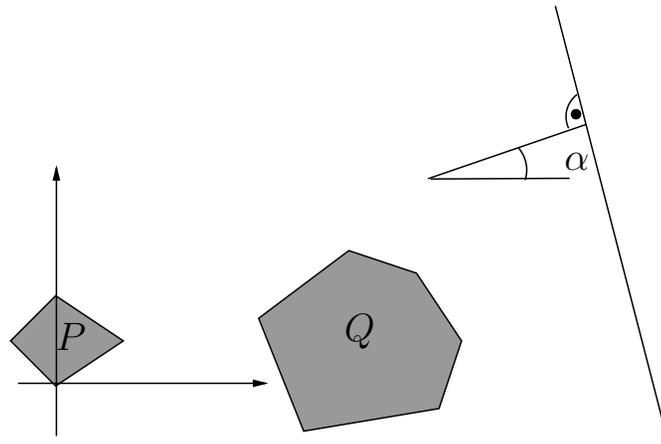
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ :



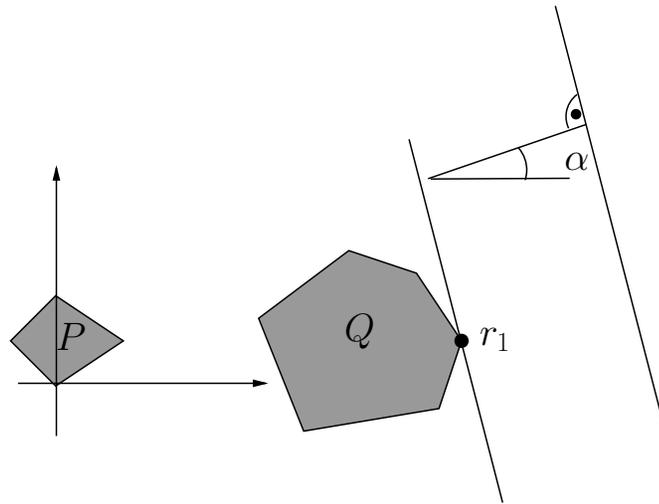
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



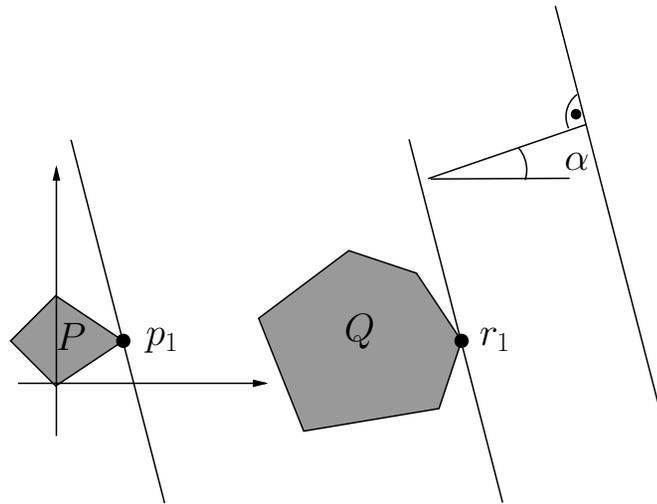
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



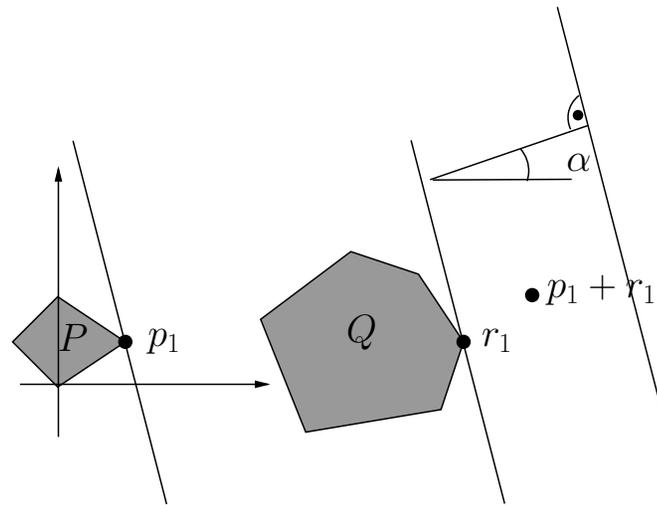
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



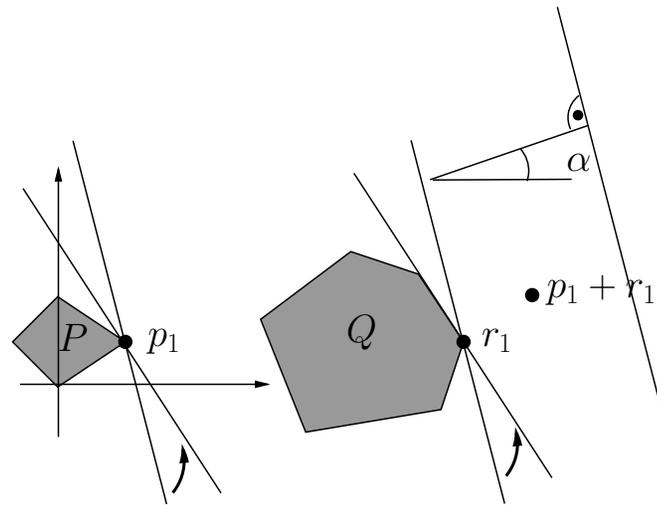
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



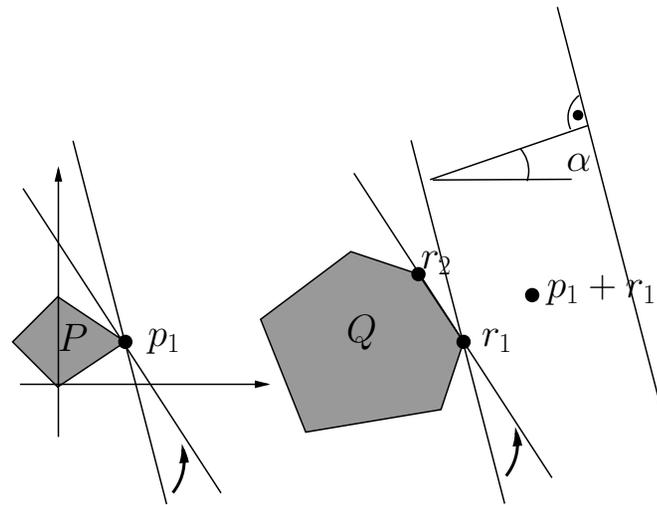
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



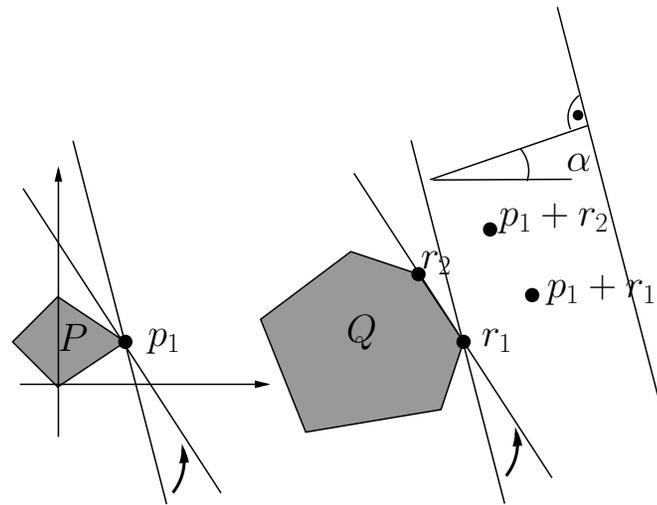
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



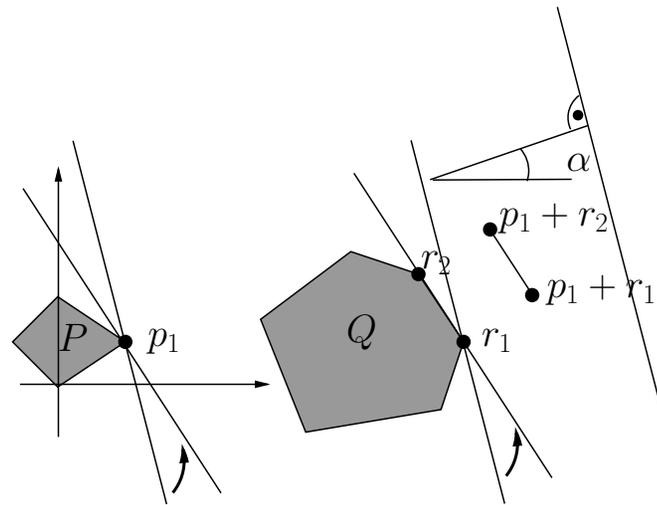
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



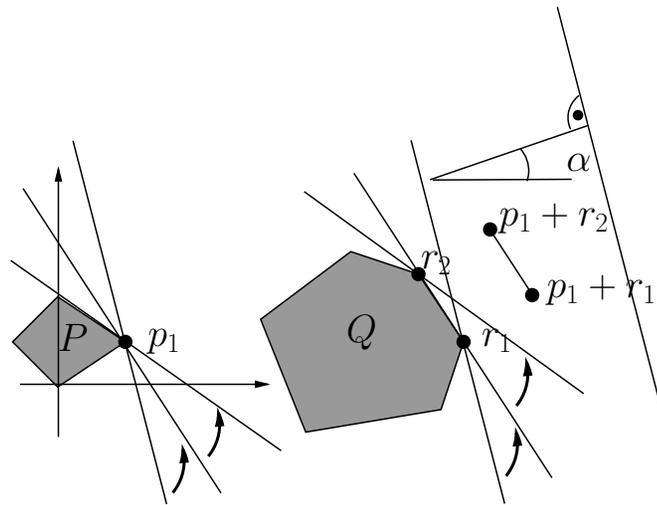
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



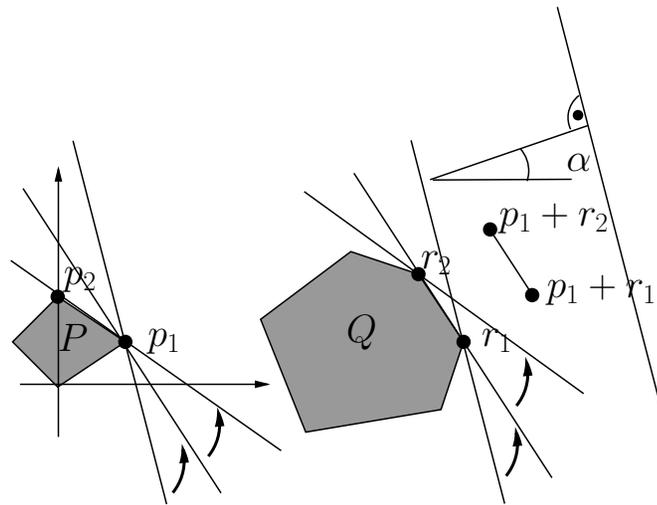
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



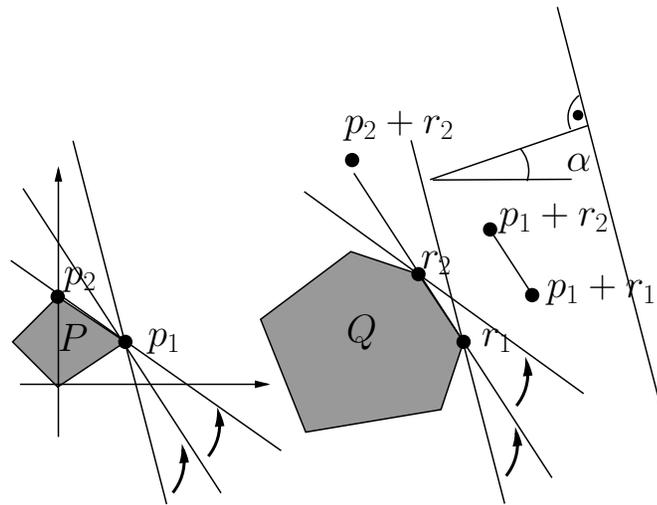
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



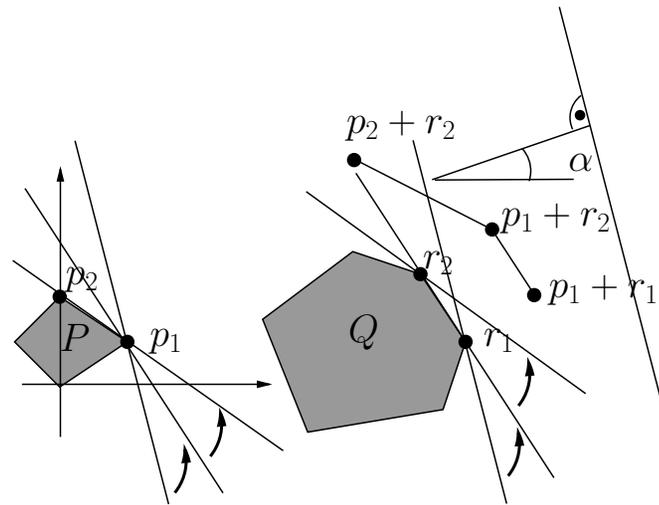
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



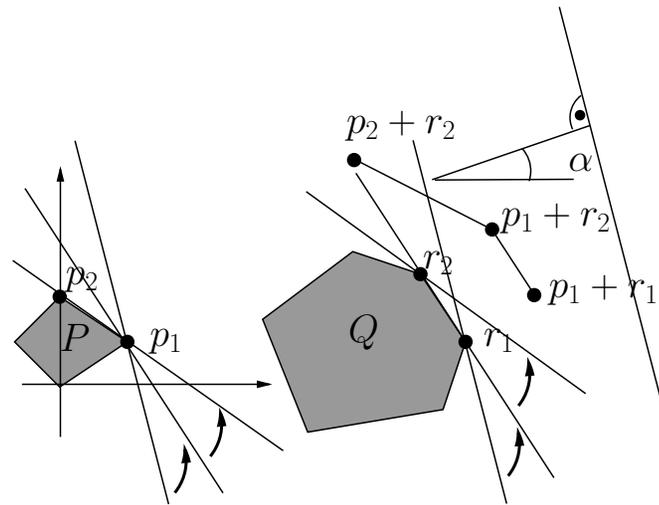
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



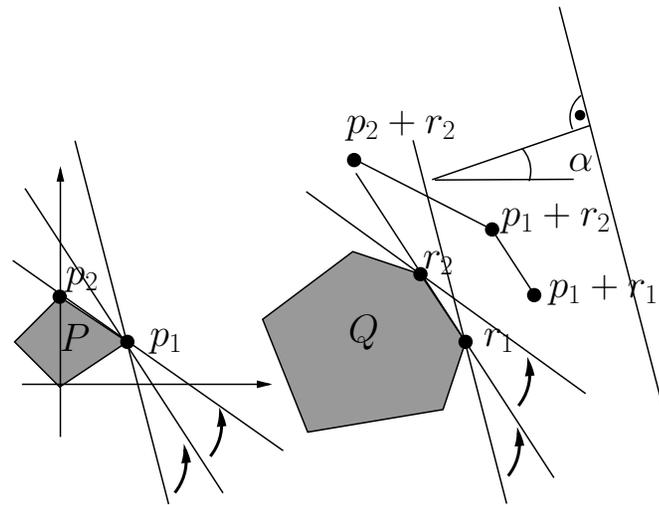
# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



# Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- $P, Q$  konvexe Polygone,  $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$  konvex (Tafel),  $O(m + n)$  Kanten
- Konstruktion in  $O(m + n)$ : Nutze Extrempunkte



Nicht mehr als  $O(n + m)$  Kanten entstehen

# Idee: Divide and Conquer

# Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter

# Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$

# Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Vereinigung aller  $CT_i$

# Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Vereinigung aller  $CT_i$
- Divide and Conquer

# Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Vereinigung aller  $CT_i$
- Divide and Conquer
- Mergen!!!

# Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Vereinigung aller  $CT_i$
- Divide and Conquer
- Mergen!!!
- Komplexität des Ergebnisses

# Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

# Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve:

## Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete

## Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:

## Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
  - Durch Jordankurven berandete Mengen  $A$ ,  $B$

## Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
  - Durch Jordankurven berandete Mengen  $A$ ,  $B$
  - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen

## Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

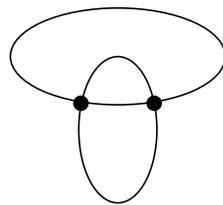
- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
  - Durch Jordankurven berandete Mengen  $A$ ,  $B$
  - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen
  - Oder Ränder haben höchstens einen Berührungspunkt

## Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

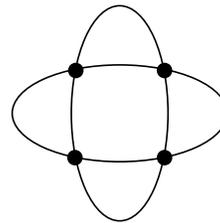
- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
  - Durch Jordankurven berandete Mengen  $A$ ,  $B$
  - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen
  - Oder Ränder haben höchstens einen Berührungspunkt
- Verhalten sich wie Kreise

# Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

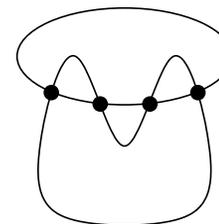
- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
  - Durch Jordankurven berandete Mengen  $A$ ,  $B$
  - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen
  - Oder Ränder haben höchstens einen Berührungspunkt
- Verhalten sich wie Kreise



(i)



(ii)



(iii)

# Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

# Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

- Konvexe Mengen  $A, B$

## Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

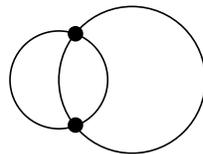
- Konvexe Mengen  $A, B$
- $A, B$  Paar von Pseudokreisen  $\Leftrightarrow A \setminus B$  und  $B \setminus A$  (weg)-zusammenhängend

## Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

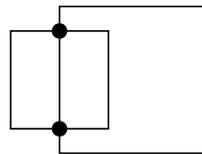
- Konvexe Mengen  $A, B$
- $A, B$  Paar von Pseudokreisen  $\Leftrightarrow A \setminus B$  und  $B \setminus A$  (weg)-zusammenhängend
- Konvexität ist wichtig ( $\Leftarrow$ )

# Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

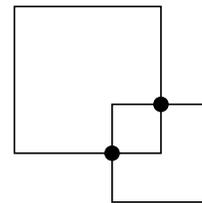
- Konvexe Mengen  $A, B$
- $A, B$  Paar von Pseudokreisen  $\Leftrightarrow A \setminus B$  und  $B \setminus A$  (weg)-zusammenhängend
- Konvexität ist wichtig ( $\Leftarrow$ )



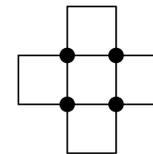
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

# Fahrplan!

# Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen

# Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$

# Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Konvexer Roboter

# Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Konvexer Roboter
- $CT_i, CT_j$  sind Pseudokreise

# Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Konvexer Roboter
- $CT_i, CT_j$  sind Pseudokreise
- Divide and Conquer

# Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Konvexer Roboter
- $CT_i, CT_j$  sind Pseudokreise
- Divide and Conquer
- Mergen!!!

# Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone:  $T_1, \dots, T_l$
- Konvexer Roboter
- $CT_i, CT_j$  sind Pseudokreise
- Divide and Conquer
- Mergen!!!
- Komplexität der Vereinigung

# Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

# Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- $A_1, A_2, \dots, A_k$  paarweise Paar v. Pseudokreisen

# Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- $A_1, A_2, \dots, A_k$  paarweise Paar v. Pseudokreisen
- polygonal, mit insgesamt  $n$  Ecken

# Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- $A_1, A_2, \dots, A_k$  paarweise Paar v. Pseudokreisen
- polygonal, mit insgesamt  $n$  Ecken
- $\partial \cup A_i$  hat Komplexität  $O(n)$

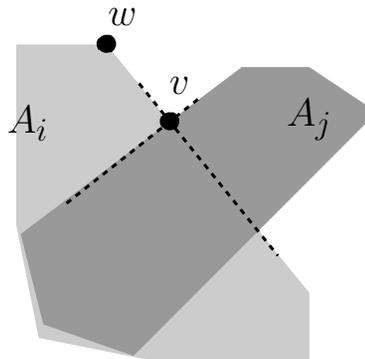
# Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- $A_1, A_2, \dots, A_k$  paarweise Paar v. Pseudokreisen
- polygonal, mit insgesamt  $n$  Ecken
- $\partial \cup A_i$  hat Komplexität  $O(n)$
- Zählargument, klassisch

# Beweis: Th. 2.13

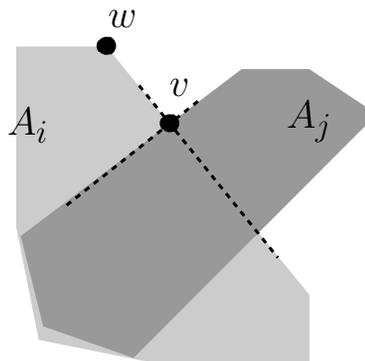
## Beweis: Th. 2.13

- Knoten  $w$  von  $A_i$  auf  $\partial \cup A_i$ : Insgesamt:  $O(n)$  viele



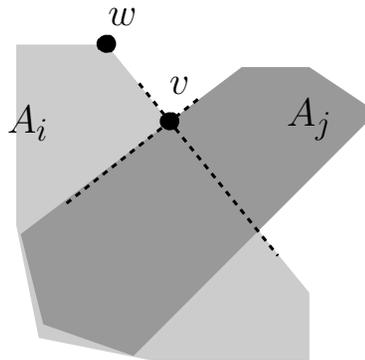
## Beweis: Th. 2.13

- Knoten  $w$  von  $A_i$  auf  $\partial \cup A_i$ : Insgesamt:  $O(n)$  viele
- Schnitt  $v$  von  $A_j, A_i$  auf  $\partial \cup A_i$  zuordnen,



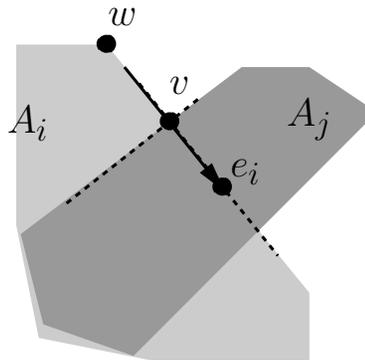
## Beweis: Th. 2.13

- Knoten  $w$  von  $A_i$  auf  $\partial \cup A_i$ : Insgesamt:  $O(n)$  viele
- Schnitt  $v$  von  $A_j, A_i$  auf  $\partial \cup A_i$  zuordnen, verfolge Kante  $e_i$ :



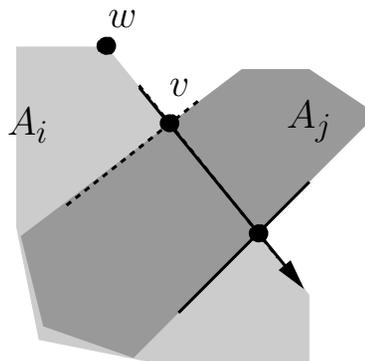
## Beweis: Th. 2.13

- Knoten  $w$  von  $A_i$  auf  $\partial \cup A_i$ : Insgesamt:  $O(n)$  viele
- Schnitt  $v$  von  $A_j, A_i$  auf  $\partial \cup A_i$  zuordnen, verfolge Kante  $e_i$ :
  - Endet in  $A_j$  (innerhalb): Zähle Endpunkt von  $e_i$



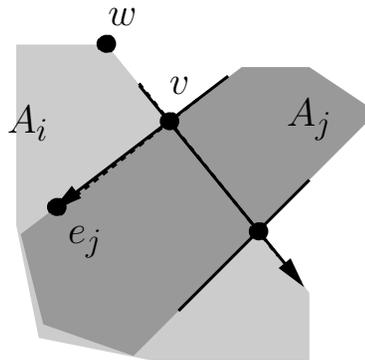
## Beweis: Th. 2.13

- Knoten  $w$  von  $A_i$  auf  $\partial \cup A_i$ : Insgesamt:  $O(n)$  viele
- Schnitt  $v$  von  $A_j, A_i$  auf  $\partial \cup A_i$  zuordnen, verfolge Kante  $e_i$ :
  - Endet in  $A_j$  (innerhalb): Zähle Endpunkt von  $e_i$
  - Geht durch  $A_j$  durch: Zähle Endpunkt von  $e_j$  (innerhalb)



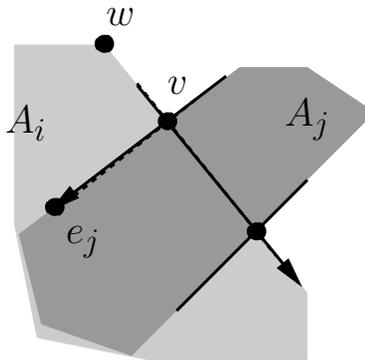
## Beweis: Th. 2.13

- Knoten  $w$  von  $A_i$  auf  $\partial \cup A_i$ : Insgesamt:  $O(n)$  viele
- Schnitt  $v$  von  $A_j, A_i$  auf  $\partial \cup A_i$  zuordnen, verfolge Kante  $e_i$ :
  - Endet in  $A_j$  (innerhalb): Zähle Endpunkt von  $e_i$
  - Geht durch  $A_j$  durch: Zähle Endpunkt von  $e_j$  (innerhalb)



## Beweis: Th. 2.13

- Knoten  $w$  von  $A_i$  auf  $\partial \cup A_i$ : Insgesamt:  $O(n)$  viele
- Schnitt  $v$  von  $A_j, A_i$  auf  $\partial \cup A_i$  zuordnen, verfolge Kante  $e_i$ :
  - Endet in  $A_j$  (innerhalb): Zähle Endpunkt von  $e_i$
  - Geht durch  $A_j$  durch: Zähle Endpunkt von  $e_j$  (innerhalb)
  - Nur zweimal belastbar, nach Aussen verfolgen



# Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,  $R$  konvex

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,  $R$  konvex
- $A = P_1 \oplus R$  und  $B = P_2 \oplus R$

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,  $R$  konvex
- $A = P_1 \oplus R$  und  $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,  $R$  konvex
- $A = P_1 \oplus R$  und  $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,  $R$  konvex
- $A = P_1 \oplus R$  und  $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

- Triangulation der Szene: Dreiecke  $T_1, \dots, T_l$

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,  $R$  konvex
- $A = P_1 \oplus R$  und  $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

- Triangulation der Szene: Dreiecke  $T_1, \dots, T_l$
- $CT_i = T_i \oplus -R$  Familie von Pseudokreisen

## Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- $P_1, P_2$  konvex,  $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$ ,  $R$  konvex
- $A = P_1 \oplus R$  und  $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

- Triangulation der Szene: Dreiecke  $T_1, \dots, T_l$
- $CT_i = T_i \oplus -R$  Familie von Pseudokreisen
- Komplexität für Divide and Conquer

## Komplexität Minkowski-Summe **Lem. 2.15**

- i)  $P_1, P_2$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  konvex, Komplexität  $\Theta(m + n)$ .
- ii) Nur  $P_2$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  Komplexität  $\Theta(mn)$ .
- iii) Kein  $P_i$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  Komplexität  $\Theta(m^2n^2)$ .

Müssen nicht disjunkt sein!!!

## Komplexität Minkowski-Summe **Lem. 2.15**

- i)  $P_1, P_2$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  konvex, Komplexität  $\Theta(m + n)$ .
- ii) Nur  $P_2$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  Komplexität  $\Theta(mn)$ .
- iii) Kein  $P_i$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  Komplexität  $\Theta(m^2n^2)$ .

Müssen nicht disjunkt sein!!!

Beweis!!

## Komplexität Minkowski-Summe **Lem. 2.15**

- i)  $P_1, P_2$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  konvex, Komplexität  $\Theta(m + n)$ .
- ii) Nur  $P_2$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  Komplexität  $\Theta(mn)$ .
- iii) Kein  $P_i$  konvex,  $P_1 \oplus P_2$  Komplexität  $\Theta(m^2n^2)$ .

Müssen nicht disjunkt sein!!!

Beweis!! i) bereits gezeigt ( $\Omega(n + m)$ )

## ii) Nur $P_2$ konvex: $O(mn)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ):  $T_1, \dots, T_{n-2}$

## ii) Nur $P_2$ konvex: $O(mn)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ):  $T_1, \dots, T_{n-2}$
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$ , Inneres disjunkt

## ii) Nur $P_2$ konvex: $O(mn)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ):  $T_1, \dots, T_{n-2}$
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$ , Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

## ii) Nur $P_2$ konvex: $O(mn)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ):  $T_1, \dots, T_{n-2}$
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$ , Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \left( \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i \right) \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \underbrace{(T_i \oplus P_2)}_{O(m) \text{ Kanten}} .$$

## ii) Nur $P_2$ konvex: $O(mn)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ):  $T_1, \dots, T_{n-2}$
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$ , Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \left( \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i \right) \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \underbrace{(T_i \oplus P_2)}_{O(m) \text{ Kanten}} .$$

- Lemma 2.12: Familie v. Pseudokreisen, insg.  $O(mn)$  Kanten

## ii) Nur $P_2$ konvex: $O(mn)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ):  $T_1, \dots, T_{n-2}$
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$ , Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \left( \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i \right) \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \underbrace{(T_i \oplus P_2)}_{O(m) \text{ Kanten}} .$$

- Lemma 2.12: Familie v. Pseudokreisen, insg.  $O(mn)$  Kanten
- Theorem 2.13: Vereinigung hat Komplexität  $O(mn)$

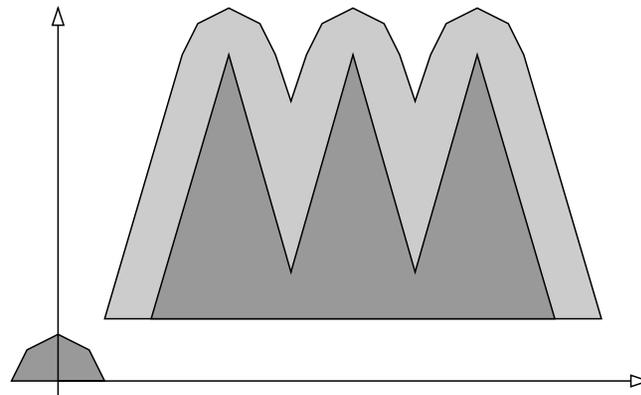
**ii) Nur  $P_2$  konvex:  $\Omega(mn)$**

## ii) Nur $P_2$ konvex: $\Omega(mn)$

Untere Schranken, konstruktiv

## ii) Nur $P_2$ konvex: $\Omega(mn)$

Untere Schranken, konstruktiv



**iii) Kein  $P_i$  konvex:  $O((mn)^2)$**

### iii) Kein $P_i$ konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ) und  $P_2$  ( $|P_2| = m$ ):  
 $T_1, \dots, T_{n-2}$  und  $T'_1, \dots, T'_{m-2}$

### iii) Kein $P_i$ konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ) und  $P_2$  ( $|P_2| = m$ ):

$T_1, \dots, T_{n-2}$  und  $T'_1, \dots, T'_{m-2}$

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$ ,  $P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

### iii) Kein $P_i$ konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ) und  $P_2$  ( $|P_2| = m$ ):

$T_1, \dots, T_{n-2}$  und  $T'_1, \dots, T'_{m-2}$

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

### iii) Kein $P_i$ konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ) und  $P_2$  ( $|P_2| = m$ ):

$T_1, \dots, T_{n-2}$  und  $T'_1, \dots, T'_{m-2}$

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

- Gesamtzahl der Kanten:  $O(nm)$

### iii) Kein $P_i$ konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ) und  $P_2$  ( $|P_2| = m$ ):

$T_1, \dots, T_{n-2}$  und  $T'_1, \dots, T'_{m-2}$

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

- Gesamtzahl der Kanten:  $O(nm)$  , jede mit jeder: Paare  $O((mn)^2)$

### iii) Kein $P_i$ konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere  $P_1$  ( $|P_1| = n$ ) und  $P_2$  ( $|P_2| = m$ ):

$T_1, \dots, T_{n-2}$  und  $T'_1, \dots, T'_{m-2}$

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

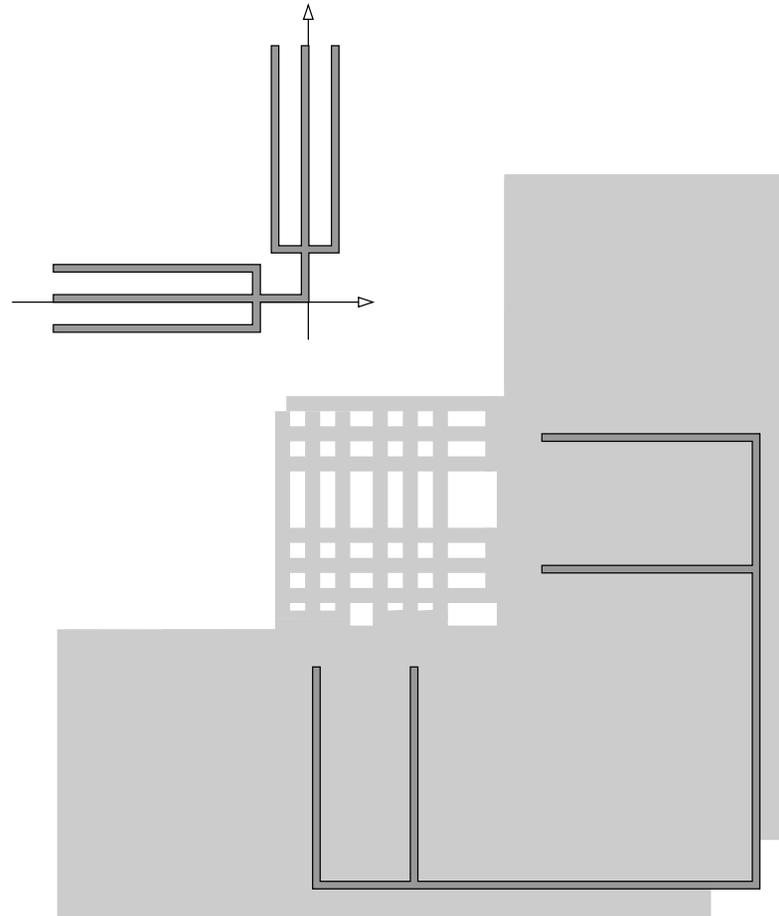
- Gesamtzahl der Kanten:  $O(nm)$  , jede mit jeder: Paare  $O((mn)^2)$

- Pseudokreise?

**iii) Kein  $P_i$  konvex:  $\Omega((mn)^2)$**

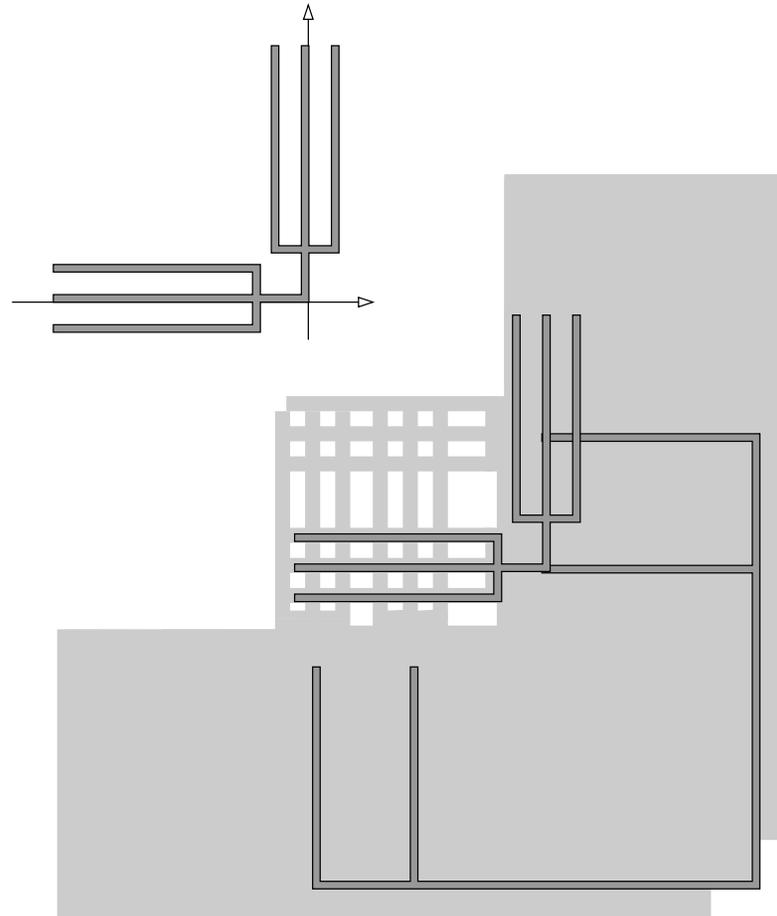
### iii) Kein $P_i$ konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv



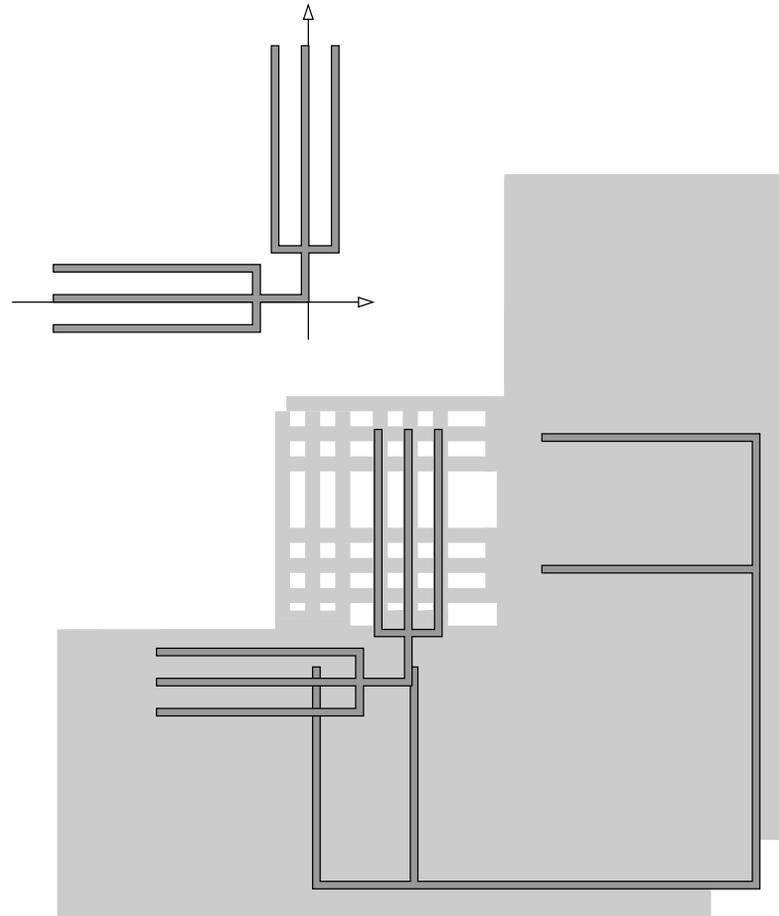
### iii) Kein $P_i$ konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv



### iii) Kein $P_i$ konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv



### iii) Kein $P_i$ konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv

