

Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15  
Übungsblatt 10  
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 16.12.2014, bis 10:15 Uhr

Besprechung: KW 52/02

- Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.
- Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.

**Aufgabe 1: Körper**

4 Punkte

Betrachten Sie die Menge  $Q = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie, dass  $Q$  zusammen mit der Addition und Multiplikation aus  $\mathbb{R}$  einen Körper bildet.

**Aufgabe 2: Erzeuger**

4 Punkte

Eine Gruppe  $(G, \circ)$  heißt *zyklisch*, wenn es ein Element  $a \in G$  gibt, sodass für alle  $g \in G$  ein  $j \in \mathbb{Z}$  existiert mit  $g = a^j$ .

Dabei ist  $a^j = \underbrace{a \circ \dots \circ a}_{j \text{ mal}}$  für  $j > 0$ ,  $a^j = \underbrace{a^{-1} \circ \dots \circ a^{-1}}_{-j \text{ mal}}$  für  $j < 0$  und  $a^0 = e$ .

Ein solches Element heißt *Erzeuger* oder *erzeugendes Element* von  $(G, \circ)$ .

Betrachten Sie die Gruppe  $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \odot_7)$ . Zeigen Sie, dass diese Gruppe zyklisch ist und geben Sie alle erzeugenden Elemente an.

**Aufgabe 3: Ringe**

2+2 Punkte

Seien  $(R_1, +_1, \cdot_1)$  und  $(R_2, +_2, \cdot_2)$  Ringe.

a) Zeigen Sie, dass  $(R_1 \times R_2, +, \cdot)$  ein Ring ist.

Dabei ist die Addition und Multiplikation komponentenweise definiert. Für  $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in R_1 \times R_2$  gilt  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2)$  und  $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2)$ .

b) Sei  $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$  ein Isomorphismus von Ringen.

Zeigen Sie, dass durch  $\varphi' : R_1^* \rightarrow R_2^*$  mit  $\varphi'(r_1) = \varphi(r_1)$  für  $r_1 \in R_1^*$  ein Isomorphismus der Einheitengruppen  $(R_1^*, \cdot_1)$  und  $(R_2^*, \cdot_2)$  definiert wird.

**Aufgabe 4: Chinesischer Restsatz**

4 Punkte

Zwei Zahnräder mit 13 beziehungsweise 17 Zähnen greifen ineinander. Wir nummerieren die Zähne von 1 bis 13 beziehungsweise die Lücken von 1 bis 17 jeweils im Drehsinn. Zu Beginn treffen Zahn und Lücke mit der Nummer 1 aufeinander. Nach wie vielen Schritten befindet sich der Zahn der Nummer 4 vom kleinen Rad in der Lücke mit der Nummer 6 vom größeren Rad? Lösen Sie das Problem mit dem Chinesischen Restsatz.