AlgGeo 8.1

Bemerkungen zu konvexen Hülle von Punkten im $\mathbb{R}^d$

S: Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^d$

$\partial ch(S)$ besteht aus

Punkten	:	0-faces
Kanten	:	1-faces
Flächen	:	2-faces
$\vdots$		
Facets	:	$d-1$-faces, definiert durch d Punkte

Frage: Wieviele Facets kann es geben?

Betrachte die "Momentenkurve", d.h. Graph von

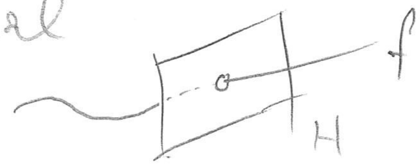
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$t \longmapsto (t, t^2, t^3, \dots, t^d)$$

$d=2$: Parabel

$\to$ untere Schranke für ch im $\mathbb{R}^2$

Lemma (i) Eine Hyperebene im $\mathbb{R}^d$ wird von f höchstens d-mal geschnitten

(ii) Falls es genau d Schnitte gibt, sind sie transversal



Beweis: Sei H gegeben durch $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d + b = 0$,

dann: $f(t) \in H \iff \underbrace{a_1t + a_2t^2 + \dots + a_dt^d + b}_{\text{reelles Polynom vom Grad } d \text{ in } t} = 0$

; hat $\leq d$ reelle Nullstellen

falls d Nullstellen: alle einfach; Vorzeichenwechsel $\square$

Alg Geo 8.2

Nun: Wähle $S := \{f(t_1), f(t_2), \dots f(t_n)\}$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

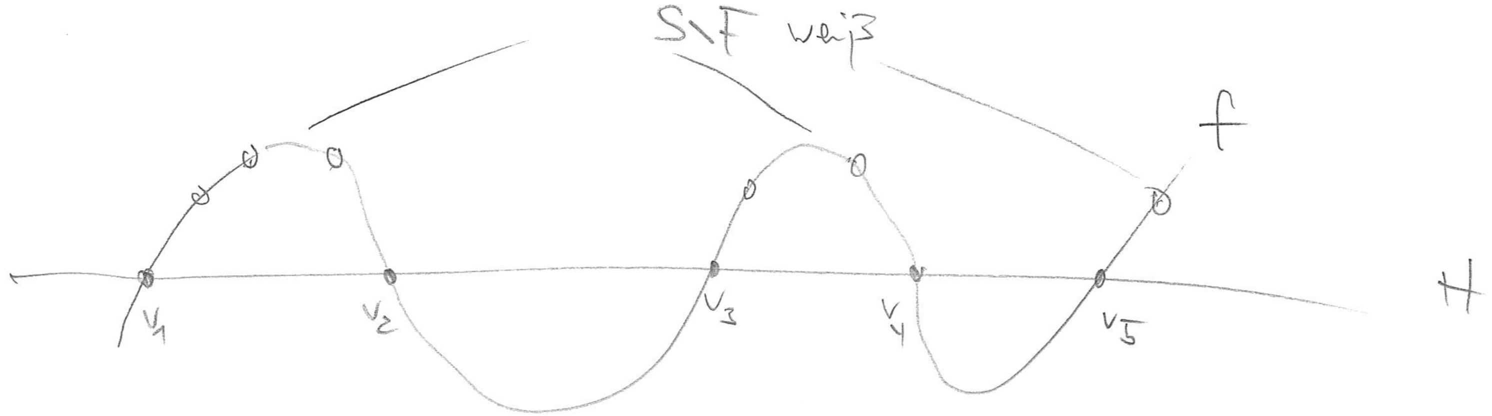
wollen Anzahl der Facets von $\partial\, ch(S)$ bestimmen

Jedes solche Facet ist durch d Punkte definiert ; es gilt

Teilmenge $F \subset S$ von d Punkten definiert ein Facet

$\Longleftrightarrow$ die eindeutig bestimmte Hyperebene H, welche F enthält, hat alle übrigen Punkte von $S \setminus F$ auf derselben Seite

denn: nach Lemma kann H außer F keine weiteren Punkte aus S enthalten



$F = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ schwarz

$\Longleftrightarrow$ zwischen je zwei weißen Punkten muß die Anzahl der schwarzen Punkte längs f gerade sein

AlgGeo 8.3

Also: # Facets von $ch(S)$ = # Möglichkeiten, $\left.\begin{array}{l} d \text{ schwarze} \\ n-d \text{ weiße} \end{array}\right\}$ Punkte so aufzureihen, daß zwischen je zwei weißen eine gerade Anzahl von schwarzen Punkten liegt

Def: (i) "zulässig" $\longrightarrow$

(ii) Eine zulässige Anordnung heißt "gepaart", wenn die Anzahl konsekutiver schwarzer Punkte stets gerade ist (auch vorn und hinten)

Lemma # gepaarter Anordnungen von $\begin{array}{l} 2k \text{ schwarzen} \\ n-2k \text{ weißen} \end{array}$ Punkten ist $\binom{n-k}{k}$

Bew: streiche jeden zweiten Punkt. Müssen k schwarze Positionen auf $n-k$ Positionen verteilen: genau $\binom{n-k}{k}$ Möglichkeit $\square$

Theorem # Facets von $\partial ch(S)$:

$$\binom{n-\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor} + \binom{n-\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1}{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1}, \quad \text{falls } d \text{ gerade}$$

$$2\cdot\binom{n-\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1}{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}, \quad \text{falls } d \text{ ungerade.} \checkmark$$

Alg Geo 8.4

Beweis 1. Fall d ungerade, $d = 2k+1$, d.h. $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor = k$

Entweder vorn oder hinten stehen ungerade viele schwarze Punkte

streiche einen $\longrightarrow$ gepaarte Anordnung von $\left.\begin{array}{ll} 2k & \text{schwarzen} \\ n-1-2k = n-(2k+1) & \text{weißen} \end{array}\right\}$ Punkten

Lemma $\Longrightarrow \binom{n-1-k}{k}$ Möglichkeiten

2. Fall: $d = 2k$ gerade $\Longrightarrow \lfloor \frac{d}{2} \rfloor = k$

(2a) vorn und hinten stehen gerade viele schwarze Punkte

$\Longrightarrow$ gepaart $\underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \binom{n-k}{k}$

(2b) vorn und hinten stehen ungerade viele schwarze Punkten

streiche zwei $\longrightarrow$ gepaarte Anordnung von $\left.\begin{array}{ll} 2k-2 & \text{schwarze} \\ n-2-2(k-1) = n-2k & \text{weißen} \end{array}\right\}$ Punkten

$$\underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \binom{n-2-(k-1)}{k-1} = \binom{n-k-1}{k-1} \text{ Möglichkeiten.} \quad \square$$

AlgGeo 8.5

Bemerkungen (ohne Beweis)

- konvexe Hülle von $S = \{$Punkte auf Momentenkurve$\}$ heißen zyklische Polytope
- sie haben in jeder Dimension (nicht nur $d-1$) die maximale Anzahl von Faces
  (Upper Bound Theorem)
- Wenn man n Punkte im $\mathbb{R}^d$ gleichverteilt und unabhängig wählt

  beträgt die mittlere Anzahl der Eckpunkte der konvexen Hülle

  - aus d-dimensionalem Einheitswürfel — $\Theta((\log n)^{d-1})$
  - aus d-dim. Kugel — $\Theta(n^{\frac{d-1}{d+1}})$

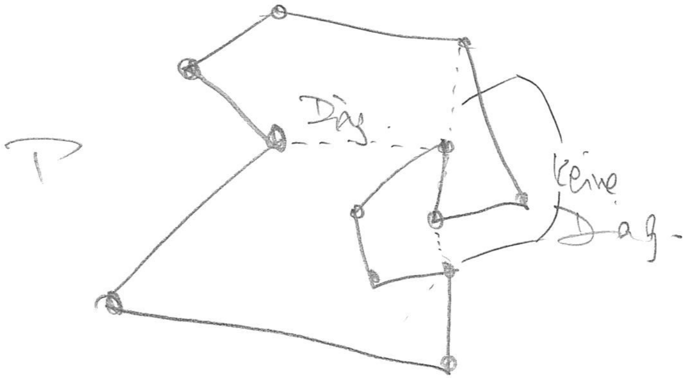
- Die randomisierte inkrementelle Konstruktion der konvexen Hülle in $d=3$ läßt sich auf höhere d verallgemeinern.

→ J. Matoušek (Lectures on Discrete Geometry)

AlgGeo 8.6

4.2 Triangulieren eines einfachen Polygons

einfaches Polygon:

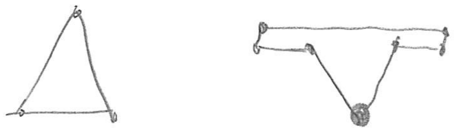


Diagonale: Liniensegment, das bis auf seine Endpunkte in $\mathring{P}$ liegt und Endpunkte sind Ecken von P

Gibt es zu jedem Eckpunkt eine Diagonale ?

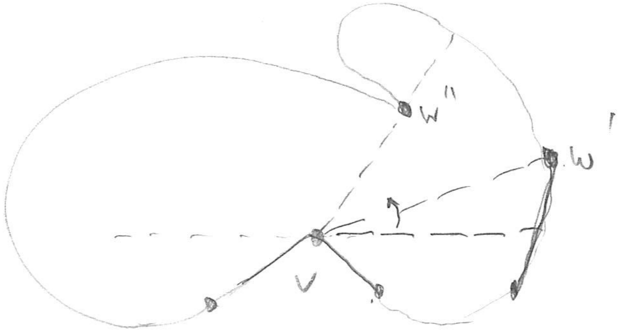
" " jeder $\underbrace{\text{spitzen}}_{}$ Ecke " ?

Innenwinkel > 180°



Ja

Bew.:



vw'' Diagonale, da vw'' keine Kante von P

vw' Diagonale, denn vw' ist keine Kante von P

□

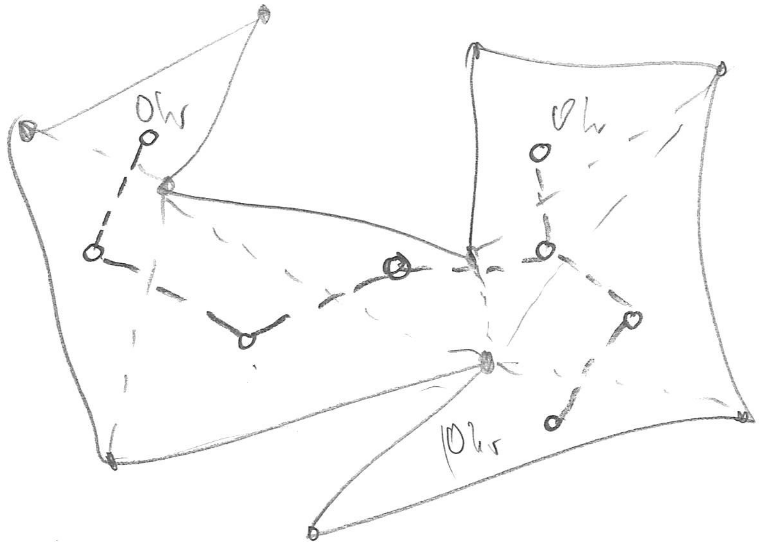
Def: Triangulation von P: Maximale Menge sich nicht kreuzender Diagonalen

klar: muß P in Dreiecke zerlegen, denn: solange beim Einfügen von Diagonalen ein nicht-konvexer Teil übrig ist: neue Diagonale finden

AlgGeo 8.7 solange noch konvexer Teil übrig ist: entweder △ ✓

sonst  trivialerweise triangulierbar

Bsp:



P kann auf viele Arten trianguliert werden

Ü4.7: Jede Triangulierung enthält $n-2$ Dreiecke und $n-3$ Kanten.

2-Ohren-Theorem 4.16 — Def. "Ohr": Dreieck der Triangulation mit einer Diagonalen und zwei Aussenkanten auf Rand

L P Polygon mit $n \geq 4$ Ecken $\longrightarrow$ jede Triangulierung von P hat mindestens zwei Ohren

Bew: $f: \overset{n}{\text{Kanten}} \longrightarrow \overset{n-2}{\text{Dreiecke}}$

$e \longmapsto$ das zu e adjazente Dreieck

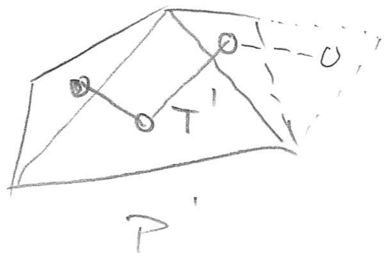
f kann nicht injektiv sein; kein Dreieck hat 3 Urbilder (da $n \geq 4$) $\square$

$\Rightarrow$ es gibt zwei Dreiecke mit zwei Urbildern (Ohren)

AlgGeo 2.8

Lemma 4.15 Sei T Triangulation eines einfachen Polygons P.
Dann ist der duale Graph T^* ein Baum mit Knotengrad ≤ 3.
Die Ohren sind die Blätter von T^*.

Bew.: Knotengrad ≤ 3 : jedes Dreieck hat höchstens 3 Nachbarn
T^* zusammenhängend, da T Polygon P lückenlos ausfüllt.
T^* zyklenfrei : per Induktion: schneide ein Ohr ab
(Existenz nach Theorem 4.16)
$\Rightarrow$ Rest ist Triangulation T' von Polygon P' mit n-1 Ecken
$\underset{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ T'^* zyklenfrei



füge Ohr wieder an
$\rightarrow$ es kann kein Zykel entstehen.
□

} $\Rightarrow$ T^* Baum.

Triangulationen sind nützlich! Teilen kompliziertes Polygon in einfache Dreiecke auf

AlgGeo 8.4

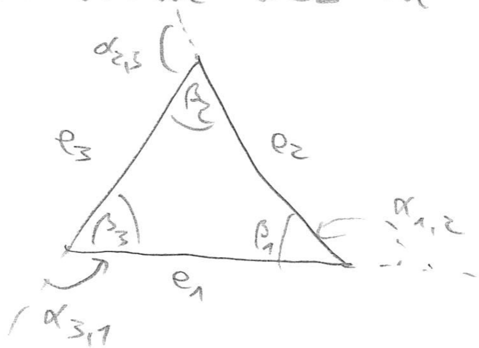
Als Anwendung: Drehwinkel bei einfachen Polygonen

allgemein: $\alpha_{i,k} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \dots + \alpha_{k-1,k}$

Lemma: $\alpha_{i,i} = 2\pi$

Beweis: Induktion über n.

$n = 3$



$\alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,1} =$

$(\pi - \beta_1) + (\pi - \beta_2) + (\pi - \beta_3)$

$= 3\pi - \underbrace{(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}_{\pi} = 2\pi$

$n \geq 4$: Ohr abschneiden ... $\square$.

AlgGeo 8.10

Wie schnell kann man einfaches Polygon P triangulieren?

- sukzessive Diagonalen finden: $O(n^2)$

- Zerlegung in monotone Polygone
  jede Senkrechte schneidet Rand in ≤ 2 Punkten

  $O(n \log n)$

Triangulieren in Zeit $O(n)$

- Zerlegung in Trapeze: $O(n \log^* n)$ im Mittel ☺

- $O(n)$ Chazelle 😐