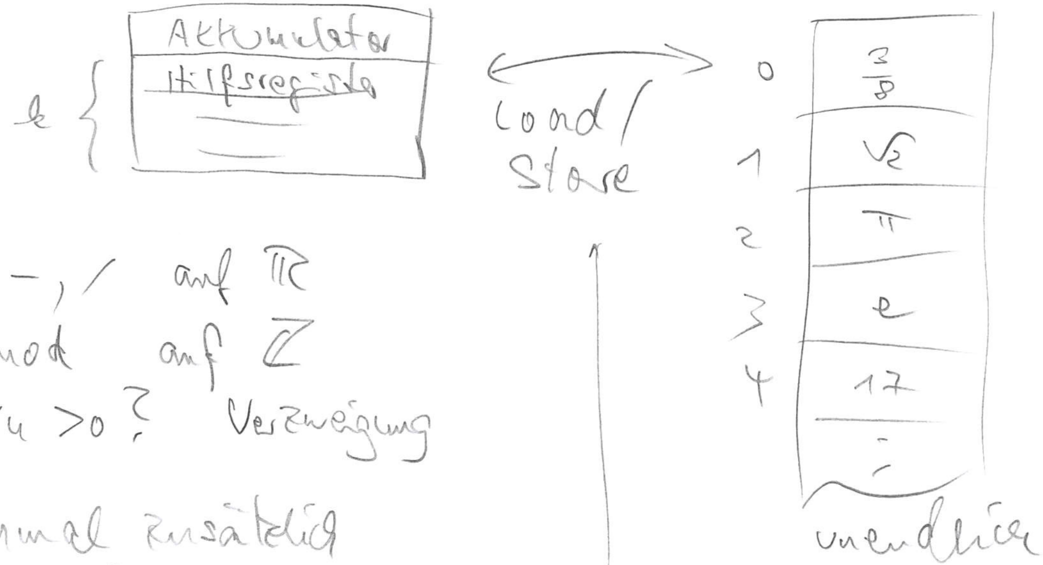
AlgGeo. 2.1

Beim letzten Mal: dichtester Abstand von n Punkten im $\mathbb{R}^2$

Sweep: $O(n \log n)$

"Eine Raumdimension wird zur Zeitdimension".

Rechnermodell: REAL RAM (random access machine)



in jeder Speicherzelle eine reelle Zahl

$\boxed{\text{bei realem Rechner: jede Speicherzelle enthält Wort fester Länge}}$

$+, \cdot, -, /$ auf $\mathbb{R}$

div, mod auf $\mathbb{Z}$

Akku > 0? Verzweigung

manchmal zusätzlich

sin, cos, $\sqrt{\ }$, trunc

dazusagen

Lade ~~dasjenige~~ den Inhalt derjenigen Zelle in den Akku, dessen Index in Zelle 4 steht

AlgGeo 2.2

<u>Laufzeit</u> alle Operationen $+, \cdot, -, /,$ div, mod, $\sqrt{\ }$, sin, cos, trunc, LOAD, STORE : 1 Schritt

worst-case) (Laufzeit eines Algorithmus A auf einer REAL RAM: max. Anzahl der Schritte in Abhängigkeit von Inputgröße

asymptotisch in Abhängigkeit von n

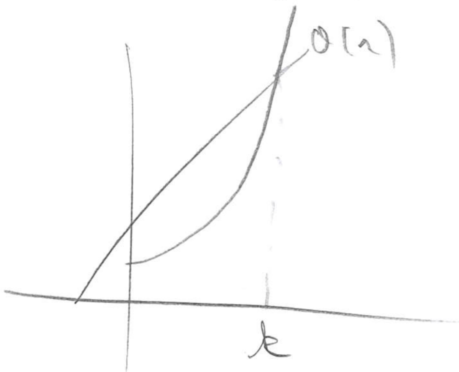
O-Notation: $O(f) := \{g;\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists C > 0\ \forall n \geq n_0 : g(n) \leq C \cdot f(n)\}$

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$g \in \Omega(f) :\Leftrightarrow f \in O(g)$

$\Theta(f) := O(f) \cap \Omega(f)$

<u>Bsp</u> $17 \cdot n^4 - \underbrace{23 \cdot \log\log n}_{O(n^2)} + \sqrt{n} - \sin n + 1 \in \Theta(n^4)$



bis k wäre der $O(n^2)$-Algorithmus besser als der lineare

AlgGeo 2.3

Closest Pair: $O(n \log n)$ Frage: Geht es vielleicht besser?

1.2.5 Untere Schranken

Sortieren durch Schlüsselvergleiche

Gegeben: Objekte $q_1, \dots, q_n$ aus einer geordneten Menge Q; paarweise verschieden

Aufgabe: Finde Permutation π, so daß $q_{\pi(1)} < q_{\pi(2)} < \dots < q_{\pi(n)}$

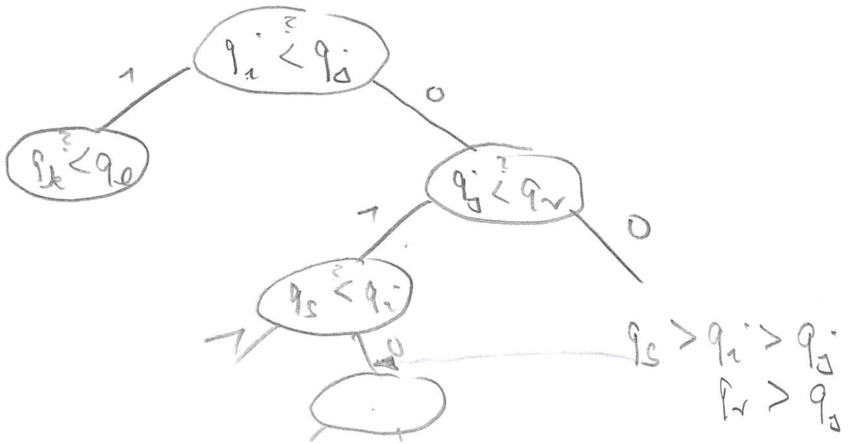
Vergleichsfunktion K mit $K(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } q_i < q_j \\ 0, & \text{falls } q_i > q_j \end{cases}$

"Orakel"

Theorem 1.4 Sortieren mit Schlüsselvergleichen hat Komplexität $\Omega(n \log n)$

Beweis Sei A ein Algorithmus zum Sortieren mit Schlüsselvergleichen.
Sei A deterministisch.

Entscheidungsbaum T von Algorithmus A



AlgGeo 2.4

$\square \quad \cdot \quad \square \quad \cdot \quad \square$ Blätter von T

Input kann auf $n!$ Arten "durcheinander" sein

" Anzahl der Permutationen von n Objekten

Für jedes Blatt b von T gibt es nur eine Permutation, ~~dessen Input~~ π ~~im Blatt b der~~

für die A im Blatt b endet, weil A korrekt ist

jede Permutation muß vorkommen, weil A vollständig ist

$$\begin{aligned} \text{Blätter} &\longrightarrow \text{Permutationen} \qquad \text{ist } \underline{\underline{\text{surjektiv}}} \\ b &\longmapsto \pi, \text{ der Inputs unter A in Blatt } b \text{ enden} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \# \text{Blätter} \geq \# \text{Permutationen} = n!$

$\Rightarrow \quad \underset{\text{max Anzahl von Tests von A}}{\underline{\underline{\text{Höhe}(T)}}} \underset{T \text{ binär}}{\geq} \log(n!) \geq \log\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right) \in \Theta(n \log n)$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot \ldots \cdot n}_{\geq \frac{n}{2} \text{ viele Faktoren der Größe } \geq \frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

n gerade

$$\boxed{\text{Stirling: } n! \sim \sqrt{2\pi n}\, \frac{n^n}{e^n}}$$

$\square$

AlgGeo 2.5

Wenn die Inputobjekte $x_1, \dots, x_n$ reelle Zahlen sind?

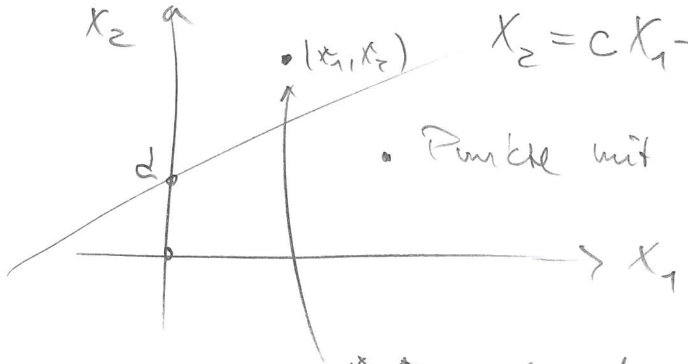
Lineares Modell: statt $x_i \overset{?}{<} x_j$: $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d \overset{?}{<} 0$
mit vom Algorithmus gewählten Zahlen $c_1, \dots, c_n, d \in \mathbb{R}$

Verallgemeinerung, denn:
$1 \cdot x_i - 1 \cdot x_j \overset{?}{<} 0 \iff x_i \overset{?}{<} x_j$

Schreibweise: $h(X_1, \dots, X_n) := c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n + d$

Tests $h(x_1, \dots, x_n) \overset{?}{<} 0$

<u>Beispiel</u> $n = 2$



$X_2 = cX_1 + d$ $\quad h(X_1, X_2) := cX_1 - X_2 + d$

• Punkte mit ~~x_2~~ $h(x_1, x_2) > 0$

$x_2 > c x_1 + d$, $h(x_1, x_2) < 0$

Wir sehen: Die Punkte (x_1, x_2) mit $h(x_1, x_2) = 0$ bilden Gerade

$h(x_1, x_2) \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix}$ bilden (offenen Halbraum)
offene Halbebene

$\begin{matrix} \le 0 \\ \ge 0 \end{matrix}$ abgeschlossene Halbebene

AlgGeo 2.6

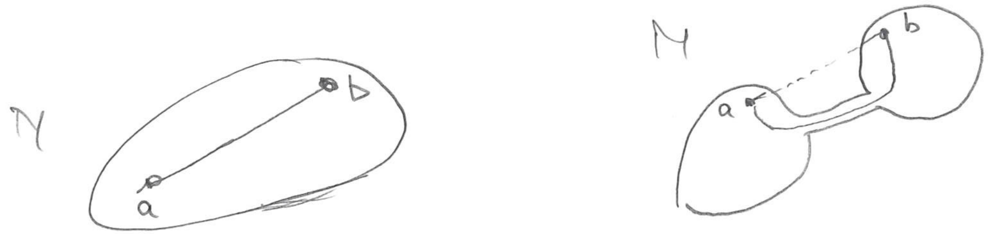
Dimension n beliebig: $h(x_1,\dots,x_n) < 0$: offener Halbraum

≥ 0: abgeschlossener Halbraum] konvex

$= 0$: Hyperebene

Def: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex $:\Leftrightarrow \forall a,b \in M: \overline{ab} \subseteq M$

↑ Liniensegment, Strecke von a nach b

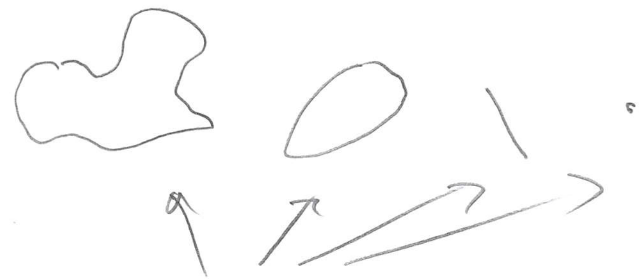


konvex

nicht konvex aber wegzusammenhängend

Def: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in M$ gibt es Weg von a nach b in M

$f: [0,1] \longrightarrow M$ stetig mit $f(0)=a$ und $f(1)=b$

M: 

besteht aus 4 wegzusammenhängenden Bestandteilen: Wegzusammenhangskomponenten von M

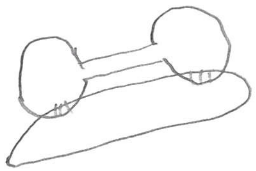
abstrakt: Auf M Äquivalenzrelation

$a,b \in M$: $a \sim b :\Leftrightarrow$ es gibt Weg in M von a nach b

Wegzusammenhangskomponenten = Äquivalenzklassen

AlgGeo 2.7

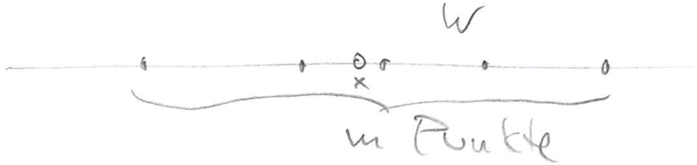
Klar: Der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex
(gilt für wegzusammenhängend i.a. nicht:



Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Elementtest für W:
Gegeben: $x \in \mathbb{R}^n$
Frage: $x \overset{?}{\in} W$

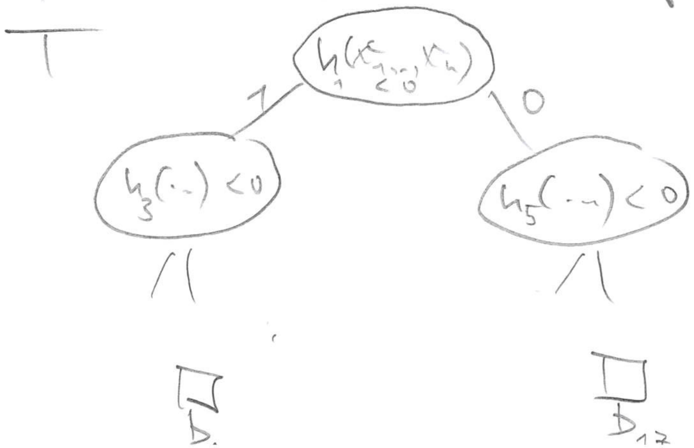
Theorem 1.5 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ habe m Wegzusammenhangskomponenten.
Dann hat Elementtest für W im linearen Modell Komplexität $\Omega(\log m)$

Reality Check: n = 1



Elementtest durch binäre Suche in $O(\log m)$

Beweis Sei A ein (det.) Alg. für Elementtest auf W im linearen Modell



sei Entscheidungsbaum für Algorithmus A

AlgGeo 2.8

für jedes Blatt b von T: $\quad A_b := \{\underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{x} \in \mathbb{R}^n ;\ A$ terminiert bei Eingabe von x in Blatt $b\}$

A_b ist Durchschnitt von (endlich vielen) offenen oder abgeschlossenen Halbräumen $\Rightarrow$ A_b konvex $\Rightarrow$ A_b wegzusammenhängend

A vollständig $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = \bigcup_{b \text{ Blatt}} A_b$

A korrekt $\Rightarrow$ $\forall b$ Blatt: $A_b \subseteq W$ oder $A_b \cap W = \emptyset$

Also:
$$W = \mathbb{R}^n \cap W = \bigcup_{b \text{ Blatt}} (A_b \cap W) = \bigcup_{b \in B} \underbrace{A_b}_{\text{wegzshgd.}}$$

sei $B := \{b \text{ Blatt} ;\ A_b \subseteq W\}$

klar: Kein A_b mit $b \in B$ kann zwei Zshgkp von W schneiden

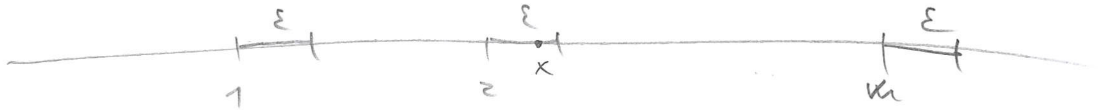
↯

$\Rightarrow$ jedes A_b ganz in einer Zshgkp W_i von W enthalten sein

$\Rightarrow$ # Blätter von T $\geq |B| \geq$ # Zshgkp W_i von W $= m$

$\Rightarrow$ Höhe$(T) \geq \log_2 m$. $\square$

Bsp:



$$W := \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{[i, i+\varepsilon]}_{\text{Zusammenhangs-komponenten von } W}$$

Alg. für Elementtest für W

$$x - \lfloor x \rfloor \leq \varepsilon \iff x \in W \quad ?$$

Kein Widerspruch zu Theorem 1.5, weil $\lfloor\;\rfloor$ trunc nicht im linearen Modell!