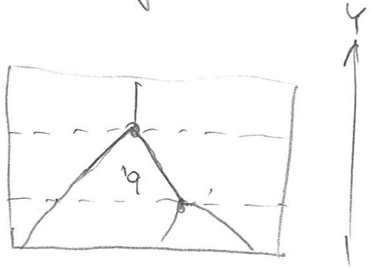
AlgGeo 23.1

Point Location: Gegeben: Zerlegung eines achsenparallelen Rechtecks in Polygone; Komplexität $O(n)$

Query-Punkt q

Frage: in welchem Polygon liegt q?

Wissen



Streifenmethode

→ $O(n)$ Streifen
keine Schnitte im Inneren von Streifen

→ können binär suchen

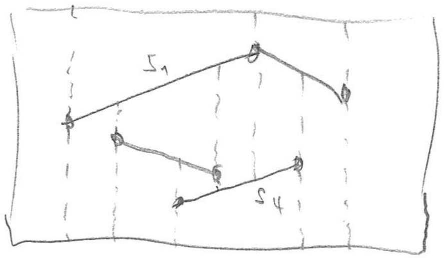
- nach q_x zwischen den waagerechten Segmenten → Streifen gefunden
- nach q zwischen den Segmenten im Streifen

$O(\log n)$

Speicherplatz, Aufbau: $O(n^2)$

Heute: Trapezzerlegung (R. Seidel)

Gegeben: Rechteck, achsenparallel
darin n Liniensegmente
- keine Kreuzungen
- Endpunkte dürfen sich berühren
- alle Anfangs-/Endpunkte der Segmente haben unterschiedliche X-Koordinaten



$S := \{s_1, \dots, s_4\}$

Def: Trapezzerlegung $T(S)$

AlgGeo 23.2

typische Trapeze:

+ Mischformen

(i) Jedes Trapez ist durch ≤ 4 Segmente definiert

(ii) Jedes Trapez hat ≤ 2 Nachbarn in jeder Richtung
(wegen allgemeiner Lage)

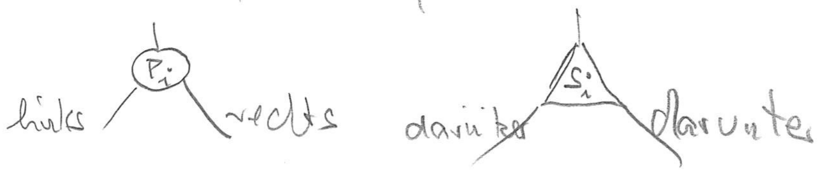
(iii) $T(S)$ hat Komplexität $O(n)$.

<u>Klar</u>: $T(S)$ eindeutig durch S bestimmt

Wie sucht man in Trapezzerlegung?

Suchstruktur $D(S)$, DAG, nicht eindeutig durch S bestimmt, sondern durch Einfügereihenfolge der Segmente

Knoten $\square$ für Trapeze



Alg Geo 23.3

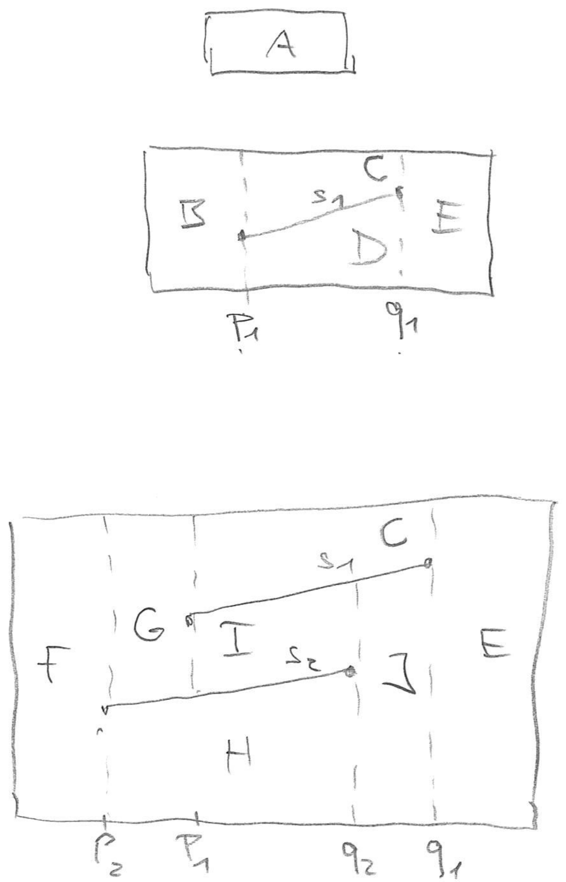
$S_i = \{ s_1, \dots, s_i \}$

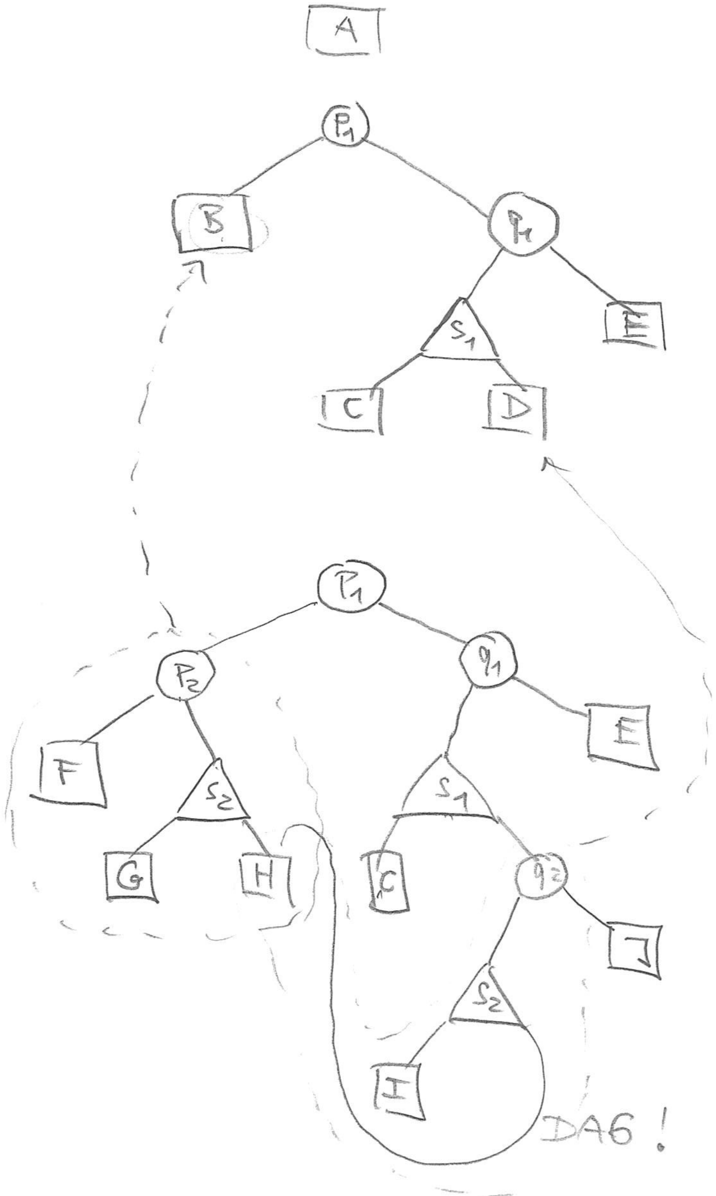
$T(S_i) \xleftrightarrow{\text{doppelt verknüpft}} D(S_i)$

$i = 0$

$i = 1$

$i = 2$





(iv) $D(S_i)$ ist DAG
jedes Trapez kommt maximal 1x vor

(v) Gestorbene Trapeze werden durch kleine DAGS der Höhe ≤ 4 ersetzt $\Rightarrow$ Höhe von $D(S_i)$ nimmt um max 3 level zu

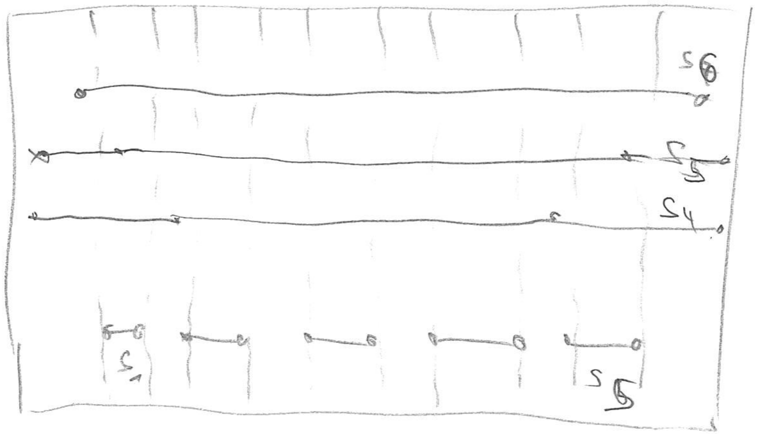
AlgGeo 23.4

Konstruktion von $T(S)$ und $D(S)$
simultan durch Einfügen der Segmente

Einfügen von s_i:
suche nach linkem Endpunkt von s_i
mittels $D(S_{i-1})$ in $T(S_{i-1})$
verfolge s_i durch die Trapeze von $T(S_{i-1})$
und aktualisiere: ersetze die von s_i
geschnittenen Trapeze durch neue und
aktualisiere $T(S_{i-1}) \to T(S_i)$
$D(S_{i-1}) \to D(S_i)$

Verschiedene
Einfügereihenfolgen können unterschiedliche Kosten
verursachen

Beispiel



$s_1, .., s_5, s_6, s_5, s_4$ ☹

$s_1, .., s_5, s_4, s_5, s_6$ ☺

$\Rightarrow$ zufällige Einfügereihenfolge
der s_i !

AlgGeo 23.5

Analyse:

1) mittlere Queryzeit für einen festen Querypunkt x
↳ über die verschiedenen Einfügereihenfolgen

Laufzeit des Queries: Länge des Suchpfads in $D(S_i)$
kann bei jeder Einfügung max. um $\underline{\underline{3}}$ zunehmen
Wie häufig passiert das?

Es gibt neuen Knoten auf Suchpfad beim Einfügen von s_i

$\Longleftrightarrow$ das x enthaltende Trapez in $T(S_i)$ ist nicht dasselbe wie in $T(S_{i-1})$

$\Longleftrightarrow$ für das x enthaltende Trapez in $T(S_i)$ ist s_i eines der maximal 4 definierenden Segmente

W'keit: $\frac{4}{i}$ (backwards analysis)

$\Longrightarrow$ mittlere Pfadlänge (bei festem x)

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot \frac{4}{i} \in O(\log n).$$

AlgGeo
23.6

2) Speicherplatz größter Platzbedarf in $D(S_n)$

$\in$ # Blätter + $\underbrace{\text{\# innere Knoten}}_{}$

$O(n)$ Trapeze $\sim$ # Trapeze in allen früheren Strukturen $D(S_1), \dots, D(S_{n-1})$ (Geschichte)

k_i := # der durch Einfügen von s_i neu entstandenen Trapeze von $T(S_i)$

= # der beim Entfernen von s_i verschwindenden Trapeze von $T(S_i)$

$$\delta(\Delta, s) := \begin{cases} 1, & \text{falls Trapez } \Delta \text{ verschwindet beim Entfernen von } s \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

backwards analysis:

$$E(k_i) = \frac{1}{i} \sum_{s \in S_i} \sum_{\Delta \text{ in } T(S_i)} \delta(\Delta, s) = \frac{1}{i} \underbrace{\sum_{\Delta \text{ in } T(S_i)} \sum_{s \in S_i} \delta(\Delta, s)}_{\leq 4 \cdot \#\text{Trapeze in } T(S_i) \,\in\, O(i)} \leq \frac{1}{i} \cdot C \cdot i \in O(1)$$

$\Rightarrow$ erwarteter Speicherplatz: $O(n)$

erwartete Kosten für Aufbau : $O(n \log n)$

pro Segment s_i

$O(\log n)$ zum Lokalisieren des linken Endpunkts

$E(k_i) \in O(1)$ zum Verfolgen von s_i / Update

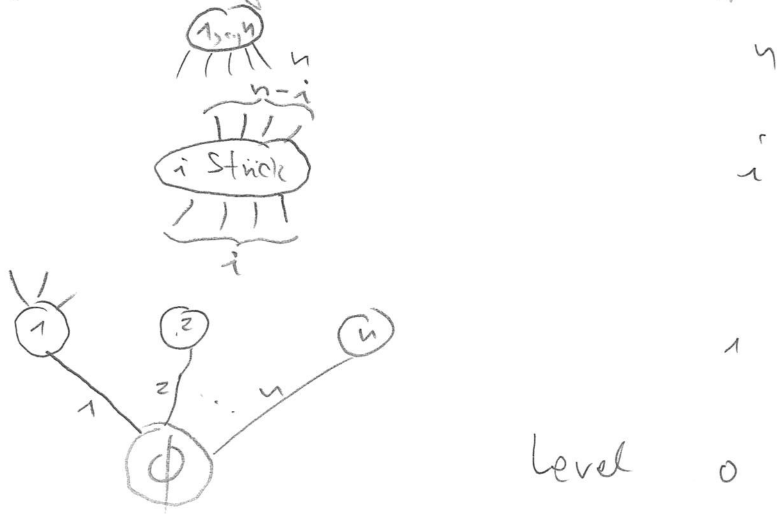
Besser als Erwartungswert: Hohe Wahrscheinlichkeit

Frage: Was ist die mittlere $\underbrace{\text{Höhe der Suchstrukturen } D(S_i)}_{\text{worst case Suchzeit in } D(S_i)}$?

Hilfsmittel: $Z \geq 0$ Zufallsvariable, $\alpha > 0$

$$P(Z \geq \alpha) \leq \frac{E(Z)}{\alpha}$$

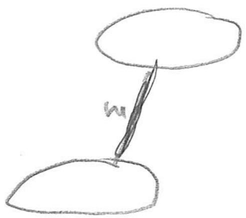
Betrachte den Teilmengenverband von S_n



Beobachtung:

Pfad von $\emptyset$ nach $\{1, 2, \dots, n\}$
$\hat{=}$ Einfügereihenfolge der s_i

$\boxed{S_n,\ q \text{ fester Anfragepunkt}}$

markiere Kante m , falls sich durch Einfügen von m das q enthaltende Trapez ändert

Alg Geo 23.8

jedes Trapez von ≤ 4 Kanten definiert

$\Rightarrow$ jeder Knoten im Verband hat maximal 4 markierte eingehende Kanten

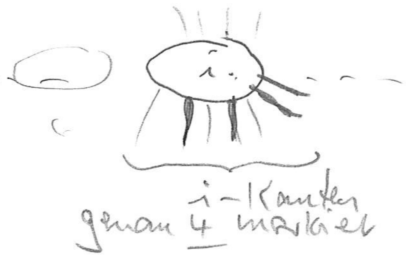
wo es weniger markierte Kanten gibt: auf 4 auffüllen

Betrachte Pfad von (0) nach $(1, 2, \ldots, n)$ ($\hat{=}$ Einfügereihenfolge)

definiere Zufallsvariable

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Kante auf diesem Pfad markiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beh: X_i sind stochastisch unabhängig : Level i : alle



Pfad top-down abschreiten

klar: $P(X_i = 1) = P(i\text{-te Kante auf Pfad ist markiert}) = \begin{cases} \frac{4}{i}, & i \geq 4 \\ 1, & i \leq 3 \end{cases}$

$$Y := \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (\forall t > 0, \lambda > 0):$$

$$P(Y \geq \lambda \ln(n+1)) = P\left(e^{tY} \geq e^{t\lambda \ln(n+1)}\right) \leq \frac{E(e^{tY})}{e^{t\lambda \ln(n+1)}}$$

AlgGeo 23.9

$$E(e^{tY}) = E\left(e^{t\sum_i X_i}\right) \underset{X_i \text{ unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\overset{(X_i=1)}{e^{t}\cdot\frac{4}{i}} + \overset{(X_i=0)}{e^{0}\left(1-\frac{4}{i}\right)}\right)$$

$$t := \ln\frac{5}{4} \qquad = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{5}{i} + \frac{i-4}{i}\right)}_{\frac{i+1}{i}} = n+1$$

$$e^{t\lambda \ln(n+1)} = (n+1)^{\ln\frac{5}{4}\cdot\lambda}$$

$\Rightarrow$

W'keit (Suchpfad nach $q) \geq 3\lambda \ln(n+1)$) $\leq \dfrac{1}{(n+1)^{\lambda \ln\frac{5}{4} - 1}}$

Aussage für festes q. Wollen jetzt Aussage für beliebige q:

Teile Rechteck durch
- alle vertikalen Segmente durch Endpunkte (in voller Länge)
- alle Segmente

$\rightsquigarrow$ Zerlegung, in der q_1, q_2 aus demselben Face auch denselben Suchpfad haben

#Faces: $\leq 2(n+1)^2$

$\Rightarrow$ Höhe von D ist Maximum von $2(n+1)^2$ Suchpfaden

$\Rightarrow$ P(einer dieser Suchpfade hat Länge $\geq 3\lambda \ln(n+1)$) $\leq 2(n+1)^2 \cdot \dfrac{1}{(n+1)^{\lambda \ln\frac{5}{4} - 1}}$

AlgGeo 23.10

(wegen Union Bound: $P(\bigcup A_i) \leq \sum_i P(A_i)$)

Setze $\lambda := 20$

$$P(\text{Höhe} \geq 60 \cdot \ln(n+1)) \leq \frac{2}{(n+1)^{1.46}} < \frac{1}{4} \text{ für } n > 4$$

$\Rightarrow P(\text{Höhe logarithmisch}) \geq \frac{3}{4}$

ebenso $P(\text{Speicherplatz linear}) \geq \frac{3}{4}$

$P(\text{Aufbaukosten in } O(n \log n)) \geq \frac{3}{4}$

$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

$\Rightarrow P(\text{alle 3 Eigenschaften erfüllt}) \geq \frac{1}{4}$

Theorem Es gibt Suchstruktur für Trapezzerlegung mit

$O(n)$ Platz
$O(\log n)$ Query-Zeit $\Big\}$ worst-case

$O(n \log n)$ Aufbau im Mittel

Alg Geo 23.11

Bem.: Probieren, neu starten, falls z.B. Platz zu groß

Erwartete Anzahl von Wiederholungen

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Bigg|_{x=\frac{3}{4}} = 4. \quad \square$$