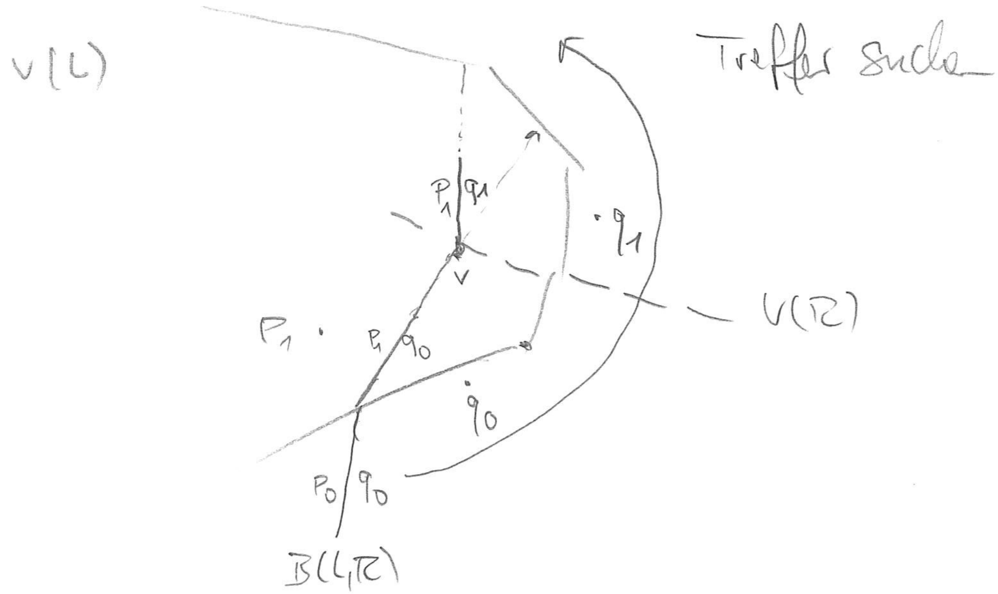
Alg Geo 21.1

Berechnung von V(S) bzw. D(S)

V(S) mit D&C:

Teile S mit Senkrechten in L und R
berechne rekursiv V(L) und V(R)
Konstruiere B(L,R) und füge
V(L), V(R) zu V(S) zusammen

B(L,R) = Punkte mit nächsten Nachbarn in L und R mit gleicher Distanz
y-monotone polygonale Kette
Anfangsstück finden im Unendlichen : $O(n)$
Verfolgen von B(L,R) simultan in V(L) und V(R)



Laufzeit?
B(L,R) kann eine Region mehrfach besuchen ... siehe Bild

Kosten für Verfolgung von B(L,R)

Berechnung der Treffer : ≤
\# Voronoi-Knoten in V(S) : $O(n)$

Entlanglaufen auf Rändern :
\# Voronoi-Knoten von V(L) und V(R)
$O(\frac{n}{2})$ (gleich genauer)

Alg Geo 21.2

Übungsaufgabe 6.11 In Abbildung 6.25 besucht $B(L, R)$ die Voronoi-Region von p_2 zweimal.

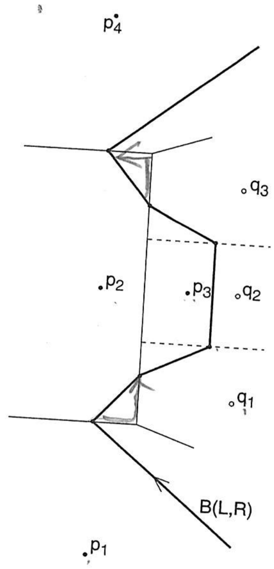


Abb. 6.25 Der Bisektor $B(L, R)$ besucht die Region von p_2 in $V(L)$ zweimal, aber die durchlaufenen Randstücke sind disjunkt

r Wellenfront bei.

Ereignis ist *Zeit* =
stück *AltWStück* fin-
line vom *SchnittPkt*
ie der Punkt, zu des-
muß in diesem Fall

ct *SchnittPkt*|.

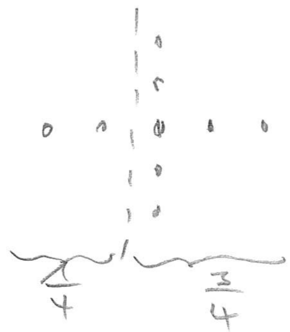
schon mehrfach ver-
menge L von S über-
, L) höchstens größer
Konkurrenten um die
te e zwischen den Re-
h in $V(L)$ eine solche
1.

$B(p, q) \cap VR(p, L) \cap$
L und q als nächsten
n gleich weit entfernt.

AlgGeo 21.3

Läßt sich S stets in zwei gleich große Teilmengen teilen?

- in allgemeiner Lage: ✓
- real:



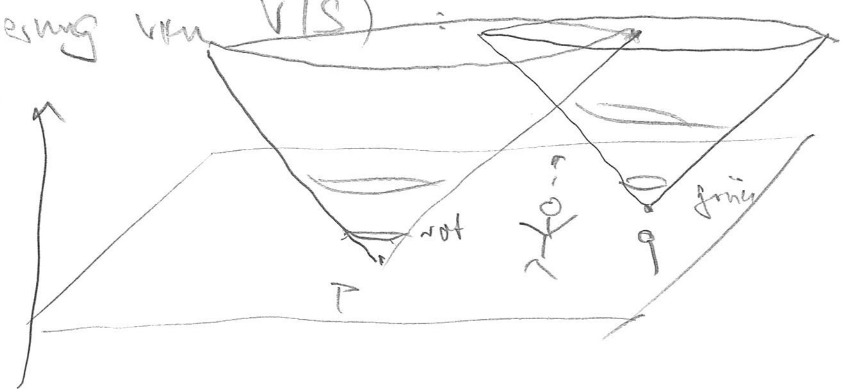
Anfangsstück von $B(L, R)$ bei Shamos/Hoey

Rekursionsbaum hat Höhe: kleinstes j mit $\left(\frac{3}{4}\right)^j \cdot n \le 1$

$j = \lceil \log_{\frac{4}{3}} n \rceil \in O(\log n)$ $\qquad n \le \left(\frac{4}{3}\right)^j$

<u>Theorem</u>: $V(S)$ läßt sich mit D&C in Zeit $O(n \log n)$ und Platz $O(n)$ konstruieren. Das ist optimal!

„Visualisierung" von $V(S)$



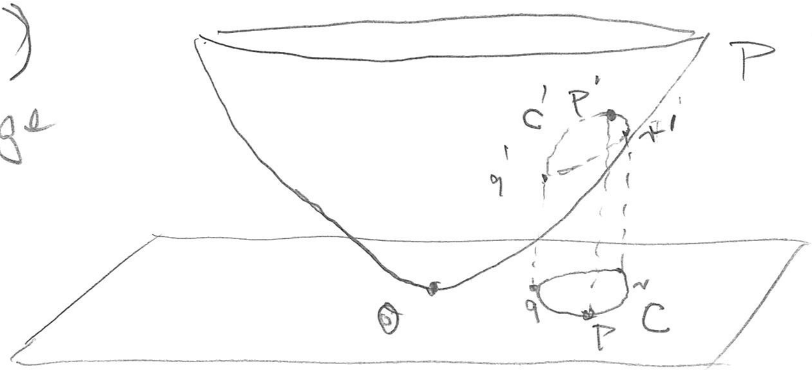
erzeugt Bild von $V(S)$, aber nicht DCEL mit Koordinaten

„z-Buffer"!

AlgGeo 21.4

Berechnung von $D(S)$

S in allgemeiner Lage



P Paraboloid

$x^2+y^2=z$

$p' = (x,y,x^2+y^2)$

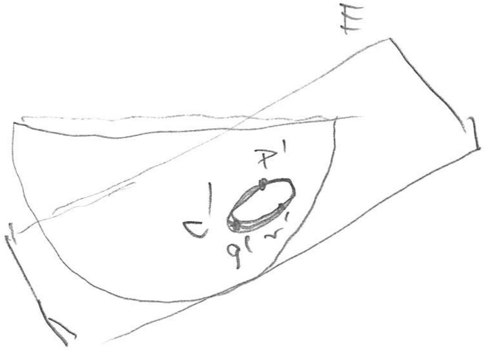
$p = (x,y)$

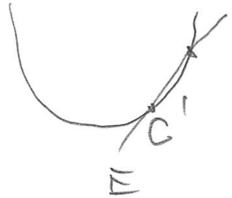
Lemma: Ein gelifteter Kreis C' liegt auf einer Ebene.

Beweis Kreis C: Gleichung $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$C' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ \underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}_{x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0} \text{ und } z = x^2+y^2\}$$

$$= P \cap \underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ z-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0\}}_{\text{affine Ebene } E}$$





Nun: p,q,r bilden Dreieck von $D(S)$

$\iff$ C enthält keine anderen Punkte von S

$\iff$ unterhalb von E liegen auf P keine anderen gelifteten Punkte

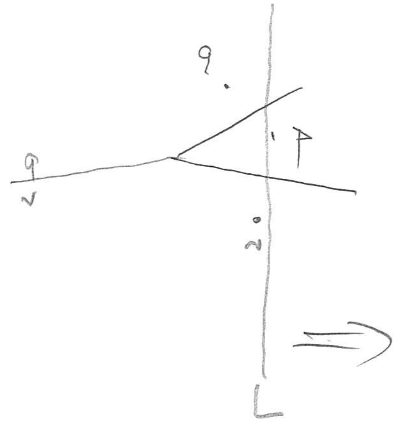
$\iff$ $\mathrm{tria}(p',q',r')$ liegt auf $\partial ch(S')$.

Alg Geo 21.5

Theorem 6.18 $D(S)$ ist die Projektion der unteren konvexen Hülle $\partial_{\text{unten}}(ch(S'))$ in $\mathbb{R}^2$.

Mit inkrementellem Alg.: mittlere Laufzeit $O(n \log n)$.

Berechnung von $V(S)$ mit Sweep

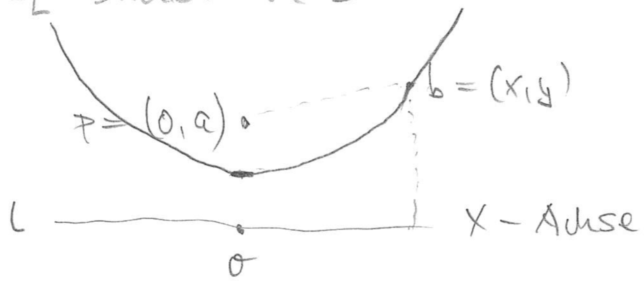


Problem:

L schneidet $VR(p,S)$, hat aber den Punkt p noch nicht entdeckt.

Idee: Fortune, Seidel: betrachte auch sweepline L als Site, verwalte das Voronoi-Diagramm von L und den Punkten S_L links von L } "Invariante"

Frage: Bisektor von Punkt und Gerade



$$b \in B(p,L) \iff y = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$$

$$\iff \cancel{y^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 2ay + a^2$$

$$\iff y = \frac{x^2 + a^2}{2a} = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2} \quad \text{Parabel}$$

Alg Geo 21.6

Sei $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ in der Reihenfolge aufsteigender X-Koordinaten. Angenommen, die *sweep line* L befindet sich gerade zwischen p_i und p_{i+1}. Wir betrachten das Voronoi-Diagramm der Punkte $p_1, \ldots, p_i$ links von L *und der sweep-line* L *selbst*; siehe Abbildung 6.13.

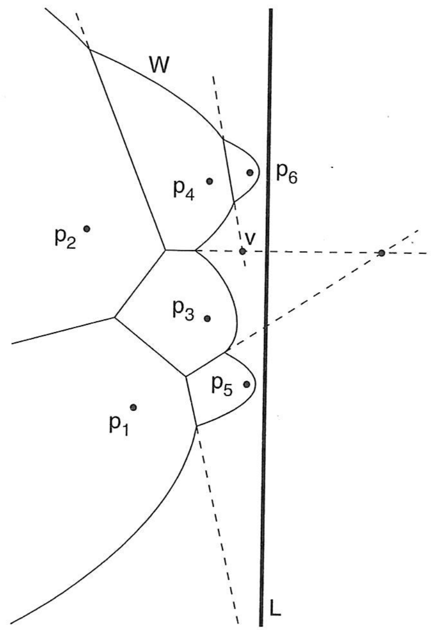


Abb. 6.13 Der Rand der Voronoi-Region von L bildet die *Wellenfront* W.

Der Rand der Voronoi-Region der *sweep line* besteht aus Parabelbögen, die Teile von Bisektoren $B(p_j, L)$ mit $j \leq i$ sind. Man nennt ihn die *Wellenfront* W. Die Parabeln selbst heißen *Wellen*, ihre in W vorkommenden Stücke nennen wir *Wellenstücke*.

Wellenfront

Links von der Wellenfront liegt ein Teil des Voronoi-Diagramms der Punkte $p_1, \ldots, p_i$, der zugleich ein Teil von $V(S)$ ist; denn die schon vorhandenen Voronoi-Kanten zwischen den Regionen von zwei Punkten aus S_i können sich nicht mehr ändern, wenn die *sweep line* auf neue Punkte stößt.

Während die *sweep line* L weiter nach rechts wandert, folgen ihr mit halber Geschwindigkeit alle Parabeln $B(p_j, L)$ mit $j \leq i$ und damit die gesamte Wellenfront W nach; daß die Wellen sich vorwärtsbewegen, kann man in Abbildung 6.14 gut erkennen.

Wo zwei in W benachbarte Wellenstücke, z. B. Teile von

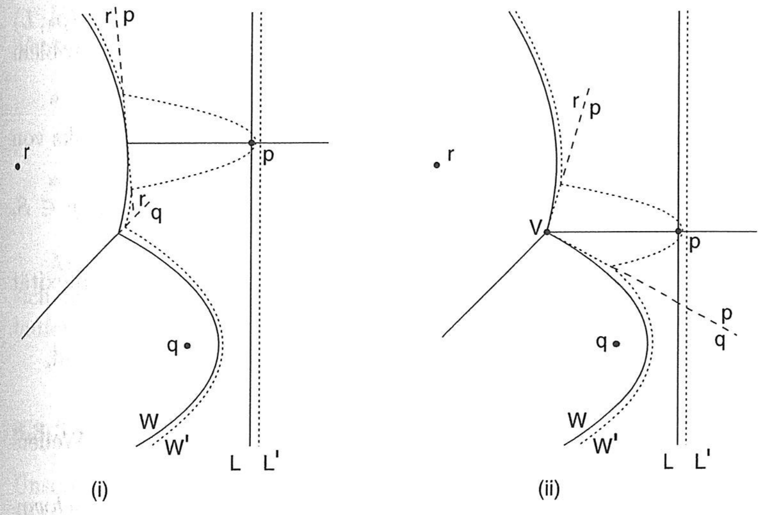


Abb. 6.14 Wenn die *sweep line* auf einen neuen Punkt trifft, entsteht eine neue Welle.

Bisektoren nach rechts über die Wellenfront hinaus werden *Spikes* genannt; sie sind in Abbildung 6.13 gestrichelt eingezeichnet.

Spikes

Dadurch, daß die Wellenstücke längs der Spikes vorrücken, vergrößert sich das Teilstück von $V(S)$ links von W.

Als Sweep-Status-Struktur *SSS* speichern wir nun nicht die von der *sweep line* geschnittenen Voronoi-Kanten, sondern die aktuelle Wellenfront W, also den Rand von $VR(L, S_i \cup \{L\})$. Ihre Gestalt ist recht einfach.

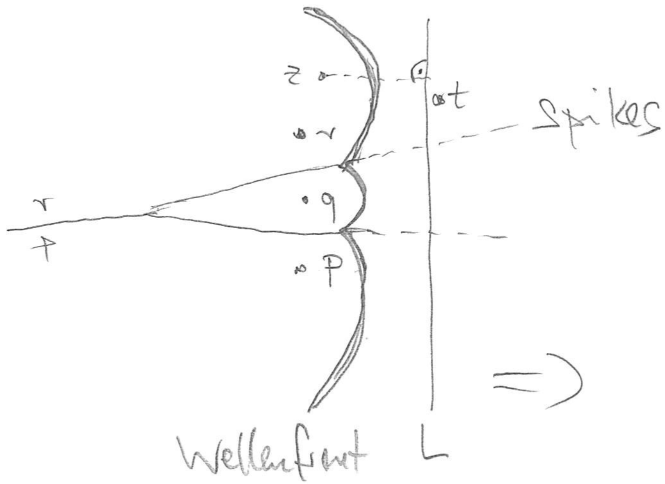
Lemma 6.10 *Die Wellenfront W ist zusammenhängend und Y-monoton.*

Struktur de
Wellenfront

Beweis. Weil je zwei solche Bisektorparabeln sich schneiden, ist W zusammenhängend. Die Monotonie kann direkt aus der Form der Parabeln geschlossen werden oder aus der Verallgemeinerung von Lemma 5.25 auf Geraden: Danach liegt zu jedem Punkt x aus der Voronoi-Region von L auch das Liniensegment xy_x zum nächsten Punkt y_x auf L ganz in der Region von L. □

Die Wellenstücke in W sind also nach Y-Koordinaten geordnet. In Abbildung 6.13 tragen von unten nach oben die Punkte p_1, p_5, p_3, p_4, p_6, p_4, p_2 ein Stück zur Wellenfront bei. Mit den Bezeichnungen auf Seite 64 sind dies die *aktiven* Punkte von S.

Alg Geo 21.7

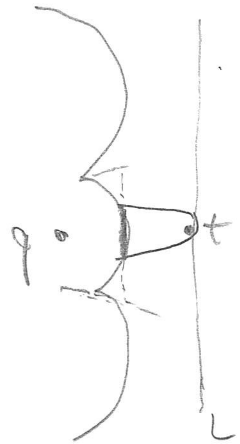


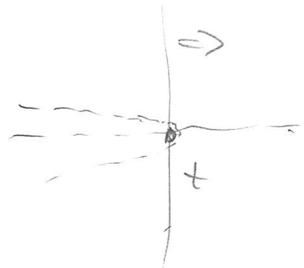
Punkt z bleibt in der Voronoi-Region von $r \in S_L$, egal welche Sites aus S künftig von L getroffen werden

Denn: $|zr| < |zL| \leq |zt|$ $\forall t$ auf oder rechts von L.

Welche Events bedrohen die Invariante?

1) Sweepline L trifft auf neuen Punkt t:
neues Wellenstück an der richtigen Stelle in Wellenfront einfügen
neue Spikes einfügen und mit Nachbarspikes auf Schnitt testen





2) Wellenfront erreicht Schnittpunkt von zwei Spikes:
altes Wellenstück aus Front entfernen
und neu benachbarte Spikes auf Schnitt teste.

Alg Geo 21.8

Kosten: Punkte aus S nach x sortieren, in ES (Warteschlange) einfügen : $O(n \log n)$

" # Events · Kosten pro Event "

Wie beim Liniensegment-Schnitt-Problem

L trifft neuen Punkt: $\# = n$; Kosten pro Event : $O(\log n)$

Wellenfront trifft Schnitt von Spikes : $\# = \#$ Voronoi-Knoten von $V(S)$ $\in O(n)$

Kosten : $O(\log n)$

<u>Theorem 6.11</u> $V(S)$ mit Sweep in optimaler Zeit $O(n \log n)$ und Platz $O(n)$.

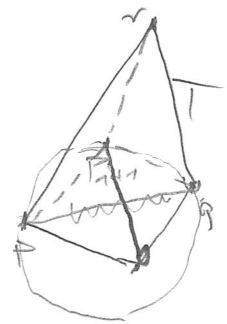
<u>weiteres Verfahren zur Berechnung von $D(S)$</u> : (allgemeine Lage)

inkrementell: $S_i = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$; $D(S_i)$ schon vorhanden, p_{i+1} kommt dazu

- bestimme Dreieck T von $D(S_i)$, welche p_{i+1} enthält
- verbinde p_{i+1} mit den Ecken von T
- Teste die neuen Dreiecke mit Eckpunkt p_{i+1}, ob Umkreis leer:

  falls ja : Delaunay !

  nein : Flip bis alle Kreise leer



AlgGeo 21.9

\# Flips beim Einfügen von p_{i+1} :

$= \text{Grad von } p_{i+1} \text{ in } D(S_{i+1}) - 3$

Wenn p_{i+1} ein zufälliger Punkt in S_{i+1} ist, finden im Mittel nur 3 Flips statt.

Problem: Wie findet man das Dreieck T, welches p_{i+1} enthält?