<u>Wdh:</u> $(X, \mathcal{F})$ Mengensystem

$\dim_{vc}(X, \mathcal{F}) := \max \{ |Y| \,;\ Y \subseteq X \text{ und } \underbrace{Y \text{ von } \mathcal{F} \text{ zerschmettert}}_{\mathcal{F}|_Y = \mathcal{P}(Y)} \}$

haben gezeigt: X einfaches Polygon, $\mathcal{F} = \{ vis(p) \,;\ p \in \mathcal{F} \}$

$\Rightarrow \dim_{vc}(X, \mathcal{F}) \leq 25.$

Brauchen:

<u>Lemma</u> Sei $|X| = m$ und $\dim_{vc}(\mathcal{F}) \leq d \leq m$

Dann: $|\mathcal{F}| \underset{(i)}{\leq} \binom{m}{0} + \dots + \binom{m}{d} \underset{(ii)}{\leq} \left(\frac{em}{d}\right)^d, \quad e = \exp(1)$

Reality check: $\dim_{vc}(\mathcal{F}) = m \Rightarrow X$ von $\mathcal{F}$ zerschmettert

$\Rightarrow |\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(X)| = 2^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{m} \leq e^d = e^m$

<u>Bew:</u> Induktion: $d = 0$, m beliebig.

$d = 0 \Rightarrow$ keine 1-elementige zerschmettert $\Rightarrow \forall a \in X \ \forall A_1, A_2 \in \mathcal{F}$
$a \in A_1 \Rightarrow a \in A_2$

$\Rightarrow |\mathcal{F}| \leq 1 = \binom{m}{0}.$

Sei $m \geq d \geq 1$: Sei $a \in X$ beliebig, $X_1 := X \setminus \{a\}$, $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}|_{X_1}$

$\Rightarrow \dim_{VC}(X_1, \mathcal{F}_1) \leq d \underset{\text{Ind.}}{\Rightarrow} |\mathcal{F}_1| \leq \binom{m-1}{0} + \dots + \binom{m-1}{d}$

definiere $\mathcal{F}_2 := \{A \in \mathcal{F} ;\ a \notin A \text{ und } A \cup \{a\} \in \mathcal{F}\}$

<u>Beh:</u> $\dim_{VC}(X_1, \mathcal{F}_2) \overset{!}{\leq} d-1$

<u>Bew:</u> Wir zeigen: $A \subseteq X_1$ zerschmettert von $\mathcal{F}_2$ $\overset{!}{\Rightarrow}$ $A \dot\cup \{a\}$ zerschmettert von $\mathcal{F}$

$\underset{\dim_{VC}(\mathcal{F}) \leq d}{\Rightarrow} |A \cup \{a\}| \leq d$

$\Rightarrow |A| \leq d-1$

Sei $A \subseteq X_1$ zerschmettert von $\mathcal{F}_2$. Zu zeigen: $A \dot\cup \{a\}$ zerschm. von $\mathcal{F}$

Sei $B \subseteq A \dot\cup \{a\}$; falls $a \notin B$ $\underset{B \subseteq A \text{ zerschm. von } \mathcal{F}_2}{\Rightarrow}$ $\exists F \in \mathcal{F}_2$: $\underset{\mathcal{F}}{\overset{\cap}{F}} \cap A = B$

falls $a \in B$: setze $B' := B \setminus \{a\} \subseteq A$

$$\underset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} \exists F \in \mathcal{F}_2 : F \cap A = B'$$

$$\Rightarrow B = B' \,\dot\cup\, \{a\} = (F \,\dot\cup\, \{a\}) \cap (A \,\dot\cup\, \{a\}) . \qquad \boxed{\text{Beh}}$$

Beh. $\underset{\text{Ind}}{\Longrightarrow}$ $|\mathcal{F}_2| \le \binom{m-1}{0} + \dots + \binom{m-1}{d-1}$.

Es gilt: $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2|$, denn

$$\mathcal{F} = \underbrace{\{B \not\ni a\} \,\dot\cup\, \{B \ni a \text{ und } B \setminus \{a\} \notin \mathcal{F}\}}_{\mathcal{F}_1} \,\dot\cup\, \underbrace{\{B \ni a \text{ und } B \setminus \{a\} \in \mathcal{F}\}}_{\cong\, \mathcal{F}_2}$$

$$\begin{array}{rccccccccc}
\Rightarrow |\mathcal{F}| = & \binom{m-1}{0} & + & \binom{m-1}{1} & + \dots + & \binom{m-1}{i} & + \dots + & \binom{m-1}{d} \\
 & & & \binom{m-1}{0} & + \dots + & \binom{m-1}{i-1} & + \dots + & \binom{m-1}{d-1} \\
 & \| & & & & \overline{} & & \overline{} \\
 & \binom{m}{0} & & & & \binom{m}{i} & & \binom{m}{d}
\end{array} \qquad \boxed{\text{Lemma, (i)}}$$

AlgGeo 14.4

(ii) $$\sum_{i=0}^{d} \underbrace{\binom{m}{i}}_{\frac{(m-i+1)\cdot\ldots\cdot m}{i!}} \leq \sum_{i=0}^{d} \frac{m^i}{i!} = \sum_{i=0}^{d} \frac{d^i}{i!} \frac{m^i \cdot d^{d-i}}{d^d} \underset{d^{d-i} \leq m^{d-i}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{d} \frac{d^i}{i!} \frac{m^d}{d^d} \leq \frac{m^d}{d^d} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i}{i!}}_{e^d} \qquad \boxed{\text{Lemma, ii}}$$

Shatter Function Lemma:

Auch wenn ein $Y \subseteq X$ von $\mathcal{F}$ nicht vollständig zerschmettert wird, ist interessant, wie mächtig $\mathcal{F}|_Y$ ist.

Def: $\pi_{\mathcal{F}}(m) := \max\limits_{Y \subseteq X,\, |Y| = m} |\mathcal{F}|_Y|$ Shatter Function

Klar: $\dim_{VC}(X, \mathcal{F}) = \infty \iff \forall m: \pi_{\mathcal{F}}(m) = 2^m$

Für $\dim_{VC} < \infty$ gilt: $\dim_{VC}(X, \mathcal{F}) \leq d \implies \pi_{\mathcal{F}}(m) \leq \left(\frac{em}{d}\right)^d$

polynomiell in m für d fest

Bew: Sei $Y \subseteq X$, $|Y| = m$. Betrachte $\mathcal{F}|_Y$

Klar: $\dim_{VC}(Y, \mathcal{F}|_Y) \leq d$. Wende Lemma an.

Alg Geo 14.5

✓

<u>Chernoff-Schranke</u> Seien $X_1, \dots, X_n$ 0/1-wertige Zufallsvariablen unabhängig

$P(X_i = 1) = p_i$

$X := X_1 + \dots + X_n \Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i =: \mu$

<u>Dann</u>: $P(X < (1-\delta)\mu) < \exp\left(-\frac{\mu\delta^2}{2}\right) \quad \forall \delta > 0.$

<u>Beweis</u>: Motwani, Raghavan: Randomized Algorithms, P 68/69

<u>Workaround</u>: J. Matoušek: Lectures on Discrete Geometry

---

<u>Def</u>: $(X, \mathcal{F})$ Mengensystem mit Maß μ; alle $F \in \mathcal{F}$ μ-meßbar.

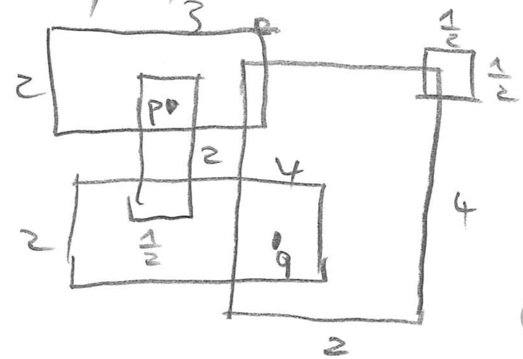
Dann heißt $N \subseteq X$ ein $\frac{1}{r}$-Netz $:\Leftrightarrow$

$\forall F \in \mathcal{F} \; \left(\mu(F) \geq \frac{1}{r} \Rightarrow N \cap F \neq \emptyset \right)$

<u>Bsp</u>: $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$: folgende Rechtecke

$r = 2$

$\{p, q\}$ sind ein $\frac{1}{2}$-Netz von $\mathcal{F}$



Für Rechtecke: NP-hart, minimale Netze zu finden

Theorem (Haussler / Welzl '87)

Gilt $\dim_{VC}(X, \mathcal{F}) = d < \infty$, dann gibt es ein $\frac{1}{r}$-Netz mit

$C\, d\, r \ln r$ vielen Elemente

$(C = 13{,}1)$

Bew: Wir zeigen: wenn man $s := C\, d\, r \ln r$ viele Elemente μ-zufällig, unabhängig aus X zieht, ist W'keit, ein $\frac{1}{r}$-Netz zu bekommen, > 0.

* entferne aus $\mathcal{F}$ alle Mengen F mit $\mu(F) < \frac{1}{r}$
* ziehe mit Zurücklegen zwei Folgen N, M der Länge s aus X
* betrachte die Ereignisse

E_0 : N kein $\frac{1}{r}$-Netz, d.h. $\exists S \in \mathcal{F}$ mit $S \cap N = \emptyset$

E_1 : $\exists S \in \mathcal{F} \ \left(S \cap N = \emptyset \text{ und } |S \cap M| \geq \frac{s}{2r} =: k \right)$

* müssen zeigen: $\frac{1}{2} P(E_0) \leq P(E_1) < \frac{1}{2} \Rightarrow P(E_0) < 1$, d.h. $P(N \text{ ist } \frac{1}{r}\text{-Netz}) > 0$.

AlgGeo 14.7

<u>Beh 1</u> $\quad \frac{1}{2} P(E_0) \overset{!}{\leq} P(E_1)$.

Sei N fest gewählt. Betrachte $P(E_1 | N)$

falls N ein $\frac{1}{r}$-Netz: $\quad P(E_0 | N) = 0 = P(E_1 | N)$

falls N kein $\frac{1}{r}$-Netz: $\quad \Rightarrow \exists S_N \in \mathcal{F}_{\frac{1}{r}} : S_N \cap N = \emptyset$

$$\Rightarrow P(E_0 | N) = 1$$

$\Rightarrow$

$$P(E_1 | N) \geq P(|S_N \cap M| \geq k) \geq P(|S_N \cap M| \geq \tfrac{s}{2}\mu(S_N))$$

außer S_N könnten mehrere solche S existieren

$k = \frac{s}{2r} \leq \frac{s}{2}\mu(S_N)$

denn jedes S hat Maß $\geq \frac{1}{r}$

$|S_N \cap M| = X_1 + \dots + X_s$ Treffer beim Ziehen von M von S_N

$X_i = 1 \iff$ das i-te x liegt in S_N

wende Chernoff an mit: $n = s$, $\delta = \frac{1}{2}$, alle $p_i = \mu(S_N)$

$$X = |S_N \cap M|$$

AlgGeo 14.8

$$\underset{\text{Chernoff}}{\Longrightarrow} P\left(|S_N \cap M| < \frac{s\mu(S_N)}{2}\right) < \exp\left(-\frac{s\mu(S_N)}{8}\right) \overset{!}{\leq} \exp(-1) = \frac{1}{2.718..} \overset{\text{VIII}}{<} \frac{1}{2}$$

$!$ gilt, falls: $\frac{s\mu(S_N)}{8} \underset{\text{Def. } s}{\geq} \frac{c\,d\,r \ln r \cdot \frac{1}{r}}{8} = \frac{c\,d \ln r}{8} \overset{!}{\geq} 1$

richtig für $c \geq 8$.

Wissen: $\forall N: \frac{1}{2}P(E_0|N) \leq P(E_1|N)$

$$\underset{\text{totale Wahrscheinlichkeit}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}P(E_0) \leq P(E_1)$$

$\boxed{\text{Schritt 1}}$

$$P(A) = \sum_i P(B_i) \cdot \underbrace{P(A|B_i)}_{\frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}} \quad \text{falls } \Omega = \dot{\bigcup} B_i$$

AlgGeo 14.9

* Ziehe N, M nochmal auf folgende Art:
  - ziehe Menge A von $2s$ Elementen
  - bestimme dann zufällig die Positionen von M und N

hat keinen Einfluss auf Entstehung von N und M.

Sei zunächst A fest, $S \in \mathcal{F}$ fest gewählt.

betrachte $P_S := P(\underbrace{S \cap N = \emptyset \text{ und } |S \cap M| \geq k}_{E_S} \mid A)$

<u>Beh 2</u> $P_S \leq n^{-\frac{cd}{4}}$

<u>Bew 2</u> falls $|S \cap A| < k$: E_S falsch, da $M \subseteq A \Rightarrow P_S = 0$ ✓

falls $|S \cap A| \geq k \Rightarrow P_S \leq P(S \cap N = \emptyset \mid A) =$

$= P($ die für N gewählten s Positionen in A vermeiden die $\geq k$ vielen mit Elementen von S besetzten Positionen in A $)$

$$\leq \frac{\binom{2s-k}{s}}{\binom{2s}{s}} = \frac{(2s-k)!\,(s!)^2}{s!\,(s-k)!\,(2s)!} = \frac{(s-k+1)\,(s-k+2)\cdots(2s-k)}{(s+1)\,(s+2)\cdots(2s)}$$

größter Term

AlgGeo 14.10

X

(es gilt: $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+c}$, falls $0 \le a \le b$, $0 \le c$)

$$\le \left(\frac{2s-k}{2s}\right)^s = \left(1-\frac{k}{2s}\right)^s \le e^{-\frac{k}{2}} = e^{-\frac{c d \ln r}{4}} = r^{-\frac{cd}{4}}$$

$\boxed{\text{Beh } 2}$

$k = \frac{s}{2r}$

$s = c \cdot d \cdot r \cdot \ln r$