Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2014
Übungsblatt 01
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Montag 18.04.2015, bis 14:30 Uhr Besprechung: 25.-29.4.

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer und den Namen angeben.*
- *Abgaben sind in Gruppen von bis zu 3 Personen möglich.*

Aufgabe 1: Punkte im Quadrat (4 Punkte)

Sei Q ein Quadrat mit Kantenlänge 1 in der euklidischen Ebene und M eine aus 10 Punkten bestehende Teilmenge von Q.

Beweisen oder widerlegen Sie: dann muss es zwei Punkte aus M geben, deren Abstand höchstens $\frac{\sqrt{2}}{3}$ beträgt.

Aufgabe 2: Dichtestes Punktepaar (4 Punkte)

Bei der Bestimmung des dichtesten Punktepaares in der Ebene könnte man doch auch so vorgehen: Wir verzichten auf den senkrechten Streifen der Breite *MinSoFar* und auf das Entfernen von Punkten aus der Sweep-Status-Struktur SSS, so dass diese immer alle bisher besuchten Punkte enthält.

Warum ist dieses Verfahren nicht so effizient wie das in der Vorlesung beschriebene?

Aufgabe 3: Schnittpunkt von Liniensegmenten

Betrachten Sie folgendes Problem:

Input: Ein Integer-Array A der Länge n.

Gesucht ist: Eine längste zusammenhängende, monoton steigende Teilsequenz.

Oder formal: Gesucht sind Indizes i und j, $(0 \leq i \leq j < n)$ mit der Eigenschaft, dass für jedes k mit $i \leq k < j$ gilt: $A[k] \leq A[k+1]$, und für alle Indizes $a \leq b$ mit dieser Eigenschaft gilt: $b - a \leq j - i$.

Geben Sie einen Sweep-Algorithmus an, der das Problem mit Zeitaufwand $O(n)$ löst, beschreiben Sie die Sweep-Status-Struktur und die Ereignisstruktur und beweisen Sie die Korrektheit, indem Sie zeigen, dass eine geeignete Invariante immer erfüllt ist.

Aufgabe 4: Wiegeproblem

Algorithmen, die mit Schlüsselvergleichen oder dem linearen Modell arbeiten, sind eng verwandt mit folgenden Wiegeproblemen. Hierbei soll durch möglichst wenige vergleichende Wiegungen mit einer Balkenwaage aus n äußerlich gleichen Kugeln diejenige mit kleinstem Gewicht ermittelt werden.

a) Es sei im Voraus nur bekannt, dass alle $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, Kugeln verschiedenes Gewicht haben. Pro Wiegung dürfen Sie nur das Gewicht zweier Kugeln miteinander vergleichen. Wie viele Wiegungen benötigen Sie dann im besten Fall und im schlimmsten Fall, um mit Sicherheit die leichteste Kugel zu bestimmen? Begründen Sie Ihre Aussagen genau!

b) Es sei im Voraus bekannt, dass alle Kugeln das Gewicht 1 haben, bis auf eine Kugel mit Gewicht 0.5. Für die Gesamtzahl der Kugeln gelte diesmal $n = 3^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Pro Wiegung dürfen Sie nun das Gesamtgewicht einer beliebigen Kugelmenge mit dem Gesamtgewicht einer beliebigen anderen Kugelmenge vergleichen. Wie viele Wiegungen benötigen Sie dann im besten Fall und im schlimmsten Fall, um mit Sicherheit die Ausreißerkugel zu bestimmen?

Für die Anzahl der Wiegungen im Worst-Case, $w(n)$, genügt eine asymptotische Angabe der Form $w(n) \in \Theta(f(n))$, wie zum Beispiel $w(n) \in \Theta(n \log n)$. Begründen Sie Ihre Aussagen genau!