Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner

Algorithmen und Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2014

Probeklausur

Namen:

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

1. Unter Prüfungsbedingungen hätten Sie 120 Minuten Zeit, diese Klausur zu bearbeiten.
2. Es können maximal 60 Punkte erreicht werden. Die Punkte haben keinen Einfluss auf die Zulassung und dienen lediglich zur Einschätzung Ihres Wissensstandes.
3. Wie bei den regulären Übungsaufgaben können Sie Ihre Lösungen (gegebenenfalls auch als Gruppe) abgeben.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 1

2+2+2+3+2+3=14 Punkte

(a) Definieren Sie, was eine deterministische 1-Band Turingmaschine ist.

(b) Was bedeutet, dass eine Turingmaschine eine Sprache L entscheidet bzw. eine Sprache L erkennt?

(c) Prof. G. Witzt behauptet, eine rekursiv aufzählbare Sprache L gefunden zu haben, deren Komplement $\overline{L}$ ebenfalls rekursiv aufzählbar ist. Kann das sein?

(d) Ist die Sprache L, gegeben durch $L = L_1 \cup L_2$ mit

$$L_1 = \{\langle M \rangle : \ M \text{ hält nicht auf der leeren Eingabe}\} \quad \text{und}$$

$$L_2 = \{\langle M \rangle : \ M \text{ hält auf der leeren Eingabe, aber frühestens nach 100 Schritten}\}$$

rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Prof. G. Witzt behauptet, $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gezeigt zu haben. Dazu hat er einen Algorithmus mit worst-case Laufzeit $O(n^2 \cdot P)$ für das Rucksack-Problem entwickelt, wobei n die Anzahl der Objekte und P das Maximum über alle Nutzenwerte der Objekte ist. Kann es einen solchen Algorithmus geben? Hat er wirklich $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gezeigt?

(f) Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen. L_1 sei auf L_2 mit einer in Zeit $O(n \log n)$ berechenbaren Funktion reduzierbar. Kann L_2 in Zeit $O(n^2)$ entschieden werden, wenn man weiß, dass

(1) L_1 nicht in Zeit $O(n)$ entschieden werden kann bzw.

(2) L_1 nicht in Zeit $O(n^2)$ entschieden werden kann bzw.

(3) L_1 nicht in Zeit $O(n^3)$ entschieden werden kann?

Aufgabe 2

4+3+4+3=14 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für beliebige rekursiv aufzählbare Sprachen $L_1, \ldots, L_9$ über dem Alphabet Σ ist die Sprache

$$L_{\geq 3}^{\leq 5} = \{w \in \Sigma^* : \text{ Es gibt mindestens 3 und höchstens 5 Indizes } i \in \{1, \ldots, 9\} \text{ mit } w \in L_i\}$$

stets rekursiv aufzählbar.

(b) Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}_{\text{connect}}$ aller Turingmaschinen, die sich auf einer Eingabe w wie folgt verhalten: Ist $w = \text{code}(G)$ für einen ungerichteten Graphen G, dann wird w genau dann akzeptiert, wenn G zusammenhängend ist, und ansonsten verworfen. Für das Verhalten auf anderen Eingaben w gibt es keine Einschränkungen.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Sprache

$$L_{\text{connect}} = \{\langle M \rangle : \ M \in \mathcal{M}_{\text{connect}}\}$$

entscheidbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Sprache $\overline{H}_{\varepsilon}^{\text{even}}$, gegeben durch

$$\overline{H}_{\varepsilon}^{\text{even}} = \{\langle M \rangle : \ M \text{ hält auf der leeren Eingabe nicht nach einer geraden Anzahl an Schritten}\},$$

nicht rekursiv aufzählbar ist.

(d) Ist die Sprache

$$L = \left\{ \text{code}(p) : \begin{array}{l} p \text{ ist ein univariates Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten} \\ \text{und es gibt eine ganze Zahl } z \text{ mit } p(z) = 3 \end{array} \right\}$$

rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3

5+6=11 Punkte

(a) Bei der *Entscheidungsvariante* von `MAX SAT` geht es darum, für eine gegebene Formel ϕ in KNF und eine natürliche Zahl t zu entscheiden, ob es eine Belegung der in ϕ vorkommenden Variablen gibt, unter der mindestens t Klauseln von ϕ wahr sind. Bei der *Optimierungsvariante* von `MAX SAT` soll eine Belegung der Variablen ausgegeben werden, unter der maximal viele Klauseln von ϕ wahr sind.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von `MAX SAT` in polynomieller Zeit lösbar ist, falls die Entscheidungsvariante von `MAX SAT` in $\mathcal{P}$ liegt.

(b) Ein *Hamiltonkreis* in einem gerichteten Graphen ist ein gerichteter Kreis, der alle Knoten des Graphen genau einmal enthält. Bei der *Entscheidungsvariante* von `HAMILTONIAN CYCLE` soll für einen gegebenen gerichteten Graphen entschieden werden, ob dieser einen Hamiltonkreis enthält. Bei der *Entscheidungsvariante* von `PATH` geht es darum zu entscheiden, ob ein gegebener gerichteter Graph einen gerichteten einfachen Weg der Länge mindestens k für eine natürliche Zahl k, die ebenfalls Teil der Eingabe ist, enthält.

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von `HAMILTONIAN CYCLE` polynomiell auf die Entscheidungsvariante von `PATH` reduzieren lässt.

Aufgabe 4

3+6=9 Punkte

(a) Geben Sie eine äquivalente Charakterisierung von $\mathcal{NP}$ mittels Zertifikaten an.

(b) Zeigen Sie, dass es für jede Sprache $L \in \mathcal{NP}$ Polynome p und q und eine deterministische Turingmaschine M mit Laufzeit $O\big(q(n) \cdot 2^{p(n)}\big)$ gibt, wobei n die Eingabelänge ist, die die Sprache L entscheidet.

Aufgabe 5

6+6=12 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ kein 2-Approximationsalgorithmus für das allgemeine `TSP` existiert. Beim allgemeinen `TSP` sind beliebige symmetrische Gewichtsfunktionen erlaubt, die im Allgemeinen keine Metrik auf der Knotenmenge bilden.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit einer metrischen Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf den Kanten. Sei $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Knoten mit gerader Kardinalität und sei $M \subseteq E$ ein kostenminimales Matching auf dem von V' induzierten Subgraphen von G.
Zeigen Sie $w(M) \leq \frac{1}{2} w(c^\star)$, wobei $c^\star$ eine kostenminimale Lösung des `TSP` auf G ist.